Wenn man einen Papierstreifen mit parallelen Kanten zu einem losen Knoten bindet, den Knoten vorsichtig immer fester zieht und dabei flach drückt, bis er sich nicht mehr fester ziehen lässt, entsteht ein regelmäßiges Fünfeck. So ist das Logo des Landeswettbewerbs Mathematik Baden-Württemberg entstanden.

Aber ist das so gefaltete Fünfeck tatsächlich regelmäßig?

Das Fünfeck ist regelmäßig.

Begründung:

Das Fünfeck ABCDE wurde aus einem Papierstreifen mit parallelen Kanten gefaltet. Durch das Überschneiden des überall gleich breiten Papierstreifens entstehen drei Rauten ABCG, ABFE und AHDE.

Zunächst wird gezeigt, dass die **Rauten ABCG und AHDE kongruent** sind. Dazu genügt es nachzuweisen, dass $<BAG = <HAE$ gilt.

- Die Rauten ABCG und ABFE stimmen in der Seite AB überein, die Rauten ABFE und AHDE in der Seite AE. Damit haben alle drei Rauten gleich lange Seiten.
- Die Diagonalen AC und AD sind Symmetrieachsen der beiden Rauten und teilen somit die Winkel $<GCB$, $<BAG$, $<HAE$ und $<EDH$ jeweils in zwei Winkel gleicher Weite.
  Aus $\alpha := <HAG = \frac{1}{2} \cdot <BAG$ und $<HAG = \frac{1}{2} \cdot <HAE$, folgt $<BAG = <HAE = 2\alpha$.

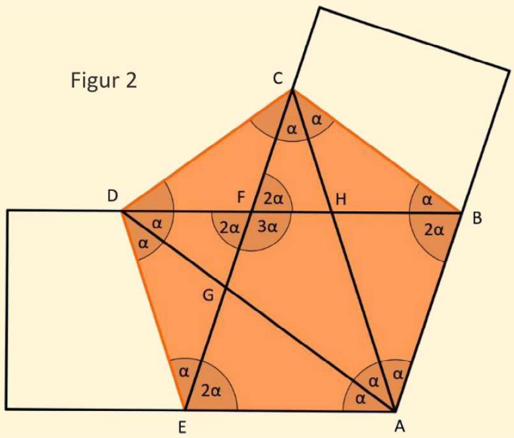
Im nächsten Schritt wird gezeigt, dass die **Raute ABFE kongruent zu den Rauten ABCG und AHDE** ist.
Dazu genügt es, nachzuweisen, dass $<AEF = <FBA = 2\alpha$ gilt.

- Da die Rauten ABCG und ABFE gleichlange Seiten haben, ist das Dreieck BCF gleichschenklig mit den Basiswinkelweiten $<BFC = <FCB = 2\alpha$. Analog ergibt sich im Dreieck EFD: $<DFE = 2\alpha$.
- Die Winkel $<BFC$ und $<AEF$ sind Stufenwinkel an den Parallelen AE und BF. Daraus folgt: $<AEF = 2\alpha$ und aus Symmetriegründen $<FBA = 2\alpha$.

Von dem Fünfeck ABCDE sind nun folgende Eigenschaften bekannt (s. Figur 2):

- CB = BA = AE = ED.
- Die spitzen Innenwinkel der kongruenten Rauten haben alle die Weite 2α, die stumpfen Innenwinkel haben die Weite 3α. Somit gilt: $<AED = <BAE = <CBA = 3\alpha$.
- Da die Summe aller Innenwinkelweiten eines Vierecks 360° beträgt, erhält man aus $2 \cdot (3\alpha + 2\alpha) = 360°$ den Wert = 36°.

Figur 2



Im letzten Schritt wird begründet, dass im Fünfeck ABCDE alle Winkel gleich weit und alle Seiten gleich lang sind. Dazu genügt es zu zeigen, dass **$<FDC = <DCF = \alpha$** und **DE = DC** gilt.

- Die beiden Dreiecke BCF und EFD sind kongruent, da sie in zwei Seitenlängen und einander entsprechenden Winkelweiten übereinstimmen. Daraus folgt: DF = FC.
  Das Dreieck DFC ist somit gleichschenklig und für die Basiswinkel $<FDC$ und $<DCF$ gilt:
  $<FDC = <DCF = (180° - 3\alpha) : 2 = (180° - 108°) : 2 = 36° = \alpha$.
- Es gilt $<CED = <DCE = \alpha$. Das Dreieck DEC ist somit gleichschenklig mit DE = DC.