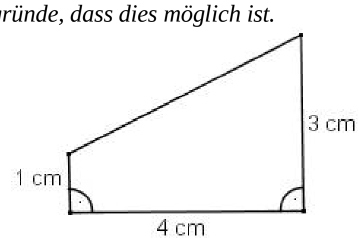
Lösungsbeispiele aus dem vergangenen Jahr

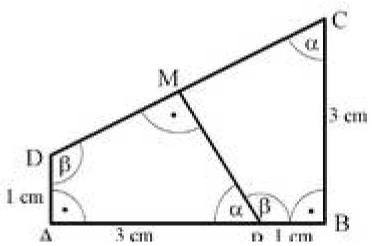
Die folgenden Lösungen von zwei Wettbewerbsaufgaben aus der ersten Runde des vergangenen Jahres zeigen, dass man mit den Kenntnissen der Mittelstufe erfolgreich teilnehmen kann.

Aufgabe 1
Das abgebildete Viereck soll durch einen einzigen geraden Schnitt so zerlegt werden, dass zwei Teile gleicher Form und Größe entstehen.
Begründe, dass dies möglich ist.



Lösung:

Der Punkt P liege auf der Seite $\overline{AB}$ im Abstand 1 cm von B (s. Zeichnung). Der gesuchte Schnitt ist eine Orthogonale durch P zur Seite $\overline{CD}$.



Beweis:
Sei M der Schnittpunkt der Orthogonalen mit der Seite $\overline{CD}$.

Sei $\alpha = \sphericalangle MPA$ und $\beta = \sphericalangle BPM$. Dann ist $\beta = 180° - \alpha$. Da die Winkelsumme im Viereck APMD 360° ergibt und die Innenwinkel bei A und M jeweils 90° betragen, ergeben $\sphericalangle ADM$ und α zusammen 180°. Somit $\sphericalangle ADM = 180° - \alpha = \beta$.

Analog argumentiert man im Viereck PBCM und erhält $\sphericalangle MCB = 180° - \beta = \alpha$.

In den Vierecken APMD und BCMP sind also jeweils zwei benachbarte Seiten gleich lang: $\overline{AP} = \overline{BC} = 3\text{cm}$, $\overline{AD} = \overline{BP} = 1\text{cm}$. Außerdem ist der zwischen den benachbarten Seiten eingeschlossene Winkel in beiden Vierecken ein rechter Winkel. Die an die Seiten anschließenden Winkel (α bzw. β) sind auch in beiden Vierecken gleich.

Daraus folgt nun, dass die beiden Teilvierecke APMD und BCMP deckungsgleich, also von gleicher Form und Größe sind.

Aufgabe 3
An der Tafel stehen die natürlichen Zahlen von 1 bis n. Du darfst immer dann drei Zahlen wegwischen, wenn eine dieser Zahlen die Summe der beiden anderen ist.
Für welche $n \le 20$ kannst du alle Zahlen wegwischen?

Lösung:
Dies ist nur möglich, wenn n = 3 oder n = 12 oder n = 15 ist.

Beweis:
Eine notwendige Bedingung für n ist, dass n durch 3 teilbar ist, denn es werden pro Zug genau 3 Zahlen entfernt. Es kommen also für n nur 3, 6, 9, 12, 15 und 18 in Frage.

Bei einem „Wisch“ werden drei Zahlen weggewischt, wir bezeichnen sie mit a, b und c. Hierbei sei c die größte der drei Zahlen, also $a + b = c$.
Wenn a und b beide gerade oder beide ungerade sind, so ist c gerade. Wenn genau eine der beiden Zahlen a oder b gerade ist, so ist c ungerade.

In jedem Fall ist also entweder keine der drei Zahlen ungerade (also a, b und c gerade) oder es sind genau zwei der drei Zahlen ungerade. Bei jedem „Wisch“ wird also eine gerade Zahl (0 oder 2) von ungeraden Zahlen weggewischt. Insgesamt wird eine gerade Zahl von ungeraden Zahlen weggewischt.

Man muss prüfen, für welche n mit $n = 3, 6, 9, 12, 15, 18$ es eine gerade Zahl von ungeraden Zahlen $\le n$ gibt. Durch Probieren findet man, dass es für n = 3, 12 und 15 eine gerade Zahl von ungeraden Zahlen unterhalb n gibt, während für n = 6, 9. 18 diese Anzahl ungerade ist. Nur n = 3, 12 und 15 kommen also in Frage.

Tatsächlich sind 3, 12, 15 Lösungen der Aufgabe:

n = 3	Wegen 1 + 2 = 3 genügt ein Zug.
n = 12	Wegen 1 + 5 = 6; 2 + 9 = 11; 3 + 7 = 10; 4 + 8 = 12 genügen hier vier Züge.
n = 15	Wegen 1 + 14 = 15; 2 + 10 = 12; 3 + 8 = 11; 4 + 5 = 9; 6 + 7 = 13 geht es für n = 15 in fünf Zügen.

Teilnahmebedingungen und Hinweise

* Teilnahmeberechtigt sind alle Schülerinnen und Schüler aus Baden-Württemberg, die eine Realschule oder ein Gymnasium bis Klassenstufe 10 einschließlich besuchen.
* Für den Wettbewerb werden die Lösungen von höchstens vier der sechs Aufgaben gewertet. Bis einschließlich Klassenstufe 9 können diese vier Aufgaben beliebig ausgewählt werden. Teilnehmerinnen und Teilnehmer der Klassenstufe 10 dürfen aus den Aufgaben 2 bis 6 auswählen.
* In der ersten Runde ist Gruppenarbeit zugelassen. Eine Gruppe kann aus bis zu drei Mitgliedern bestehen. Besucht mindestens ein Gruppenmitglied die Klassenstufe 10, so werden nur Lösungen zu den Aufgaben 2 bis 6 gewertet.
* **Neu: Teilnehmer der Klasse 10 dürfen auch Aufgabe 2 bearbeiten.**
* Bei jeder Aufgabe sind vier Punkte erreichbar. Jeder Einzelteilnehmer mit mindestens acht Punkten erhält eine Urkunde und einen Buchpreis. Die Mitglieder einer Gruppe erhalten eine Urkunde. Für einen ersten Preis sind mindestens 14 Punkte erforderlich, für einen zweiten Preis mindestens 11 Punkte.
* Einzelteilnehmer und Gruppenmitglieder, die einen ersten oder zweiten Preis erhielten, können sich durch die Teilnahme an der zweiten Runde für ein mehrtägiges mathematisches Seminar qualifizieren. In der zweiten Runde ist keine Gruppenarbeit mehr zugelassen.

  Zu diesen Seminaren, die in den vergangenen Jahren bei den Teilnehmern ein sehr positives Echo gefunden haben, werden bis zu 60 Jugendliche eingeladen. Es entscheidet das Ergebnis der zweiten Runde.
* Die in der ersten Runde erfolgreichsten „Juniorstarter“ der Klassen 5 – 7 werden an einem Sonnabend zu einem mathematischen Seminar eingeladen.
* Für die Lösung jeder Aufgabe ist ein gesondertes Blatt DIN A4 zu verwenden, das jeweils mit dem Namen zu versehen ist.
* Jede Einsendung muss auf der ersten Seite mit der unterschriebenen Erklärung versehen sein, dass alle Aufgaben selbstständig bzw. nur in Zusammenarbeit mit den Gruppenmitgliedern gelöst wurden. Die Selbstständigkeit bleibt gewahrt, wenn zu Fragen der Dokumentation um Hilfe nachgesucht wird oder Begriffe in der Aufgabenstellung erfragt werden. Nachfragen sind auch unter info@landeswettbewerb-mathematik.de möglich.
* Zu einer vollständig richtigen Lösung gehört insbesondere, dass alle wesentlichen Zwischenschritte aufgeführt und begründet sind. Die bloße Angabe eines Zahlwertes oder von Beispielen genügt nicht als Lösung. Bei der Verwendung von mathematischen Sätzen, die aus dem Unterricht oder aus dem Schulbuch nicht bekannt sind, ist eine präzise, vollständige Formulierung und eine genaue Quellenangabe, jedoch kein Nachweis erforderlich.
* Die Korrekturentscheidung ist endgültig und unterliegt nicht dem Rechtsweg.
* Nach Abschluss der Korrektur erhält jeder Teilnehmer bzw. jede Gruppe Nachricht über das Ergebnis und Lösungsbeispiele zu allen Aufgaben.
* Eine Rücksendung der korrigierten Arbeiten ist aus organisatorischen Gründen nicht möglich. Es empfiehlt sich deshalb, eine Kopie anzufertigen, um die eigenen Lösungen mit den Lösungsbeispielen vergleichen zu können.
* Die ausreichend frankierten Zuschriften (Umschlag DIN A4) sind zu richten an:

  Herrn
  Hanspeter Eichhorn
  Verschaffeltstraße 27
  68723 Schwetzingen

  Einsendeschluss ist der **05.11.2009** (Datum des Poststempels).
* Übungsmaterial:
  Die Aufgaben und Lösungen aller bisherigen Wettbewerbe sind auf einer CD erschienen und können über www.landeswettbewerb-mathematik.de angefordert werden.