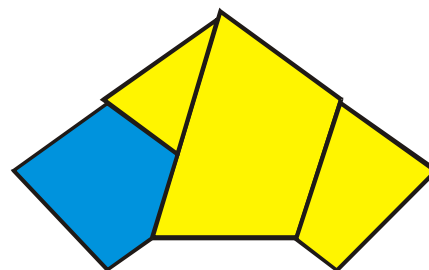


Landeswettbewerb Mathematik

Baden-Württemberg

Musterlösungen 2. Runde 2016/2017



Aufgabe 1

Paul soll fünf positive ganze Zahlen nebeneinander schreiben. Dabei muss er Folgendes beachten:

Die erste Zahl ist so groß wie die Quersumme der zweiten Zahl, die fünfte Zahl ist so groß wie die Quersumme der vierten Zahl. Die zweite, die dritte und die vierte Zahl ist jeweils so groß wie die Summe der Quersummen ihrer beiden Nachbarzahlen.

Bestimme den kleinsten Wert, den die Summe dieser fünf Zahlen haben kann.

Lösung:

Der kleinste Wert, den die Summe haben kann, ist 45.

Beweisvorschlag:

Für eine natürliche Zahl n bezeichnen wir mit $Q(n)$ die Quersumme von n . Wir benutzen die folgende bekannte Tatsache:

Vorbemerkung: Für eine natürliche Zahl n ist $n - Q(n)$ durch 9 teilbar. Dies bedeutet dass n und $Q(n)$ bei der Division durch 9 denselben Rest lassen. Insbesondere ist n genau dann durch 9 teilbar, wenn $Q(n)$ durch 9 teilbar ist.

Beweis des Vorbemerkung: Sei $n = n_k \cdot 10^k + n_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \dots + n_1 \cdot 10 + n_0$ die Dezimaldarstellung von n ($0 \leq n_i \leq 9$ für alle $0 \leq i \leq k$).

Dann ist $Q(n) = n_k + n_{k-1} + \dots + n_1 + n_0$ die Quersumme von n . Es ergibt sich

$$n - Q(n) = n_k \cdot (10^k - 1) + n_{k-1} \cdot (10^{k-1} - 1) + \dots + n_2 \cdot (10^2 - 1) + n_1 \cdot (10 - 1)$$

Da $10^k - 1, 10^{k-1} - 1, \dots, 10^2 - 1 = 99$ und $10 - 1 = 9$ alle durch 9 teilbar sind, ist auch $n - Q(n)$ durch 9 teilbar. Somit ist die Vorbemerkung bewiesen.

Die fünf Zahlen, die Paul aufschreibt, bezeichnen wir der Reihe nach mit a, b, c, d, e .

Nach Voraussetzung gilt:

(1) $a = Q(b)$

(2) $b = Q(a) + Q(c)$

(3) $c = Q(b) + Q(d)$

(4) $d = Q(c) + Q(e)$

(5) $e = Q(d)$

Addiert man die Gleichungen (1) und (2), so folgt $a + b = Q(b) + Q(a) + Q(c)$ bzw.

$$(a - Q(a)) + (b - Q(b)) = Q(c).$$

Nach der Vorbemerkung ist also $Q(c)$ und damit c durch 9 teilbar. Da c positiv ist folgt

$$(6) \quad c \geq 9.$$

Aus (1), (3) und (5) ergibt sich

$$(7) \quad c = a + e.$$

Demnach ist

$$Q(a) + Q(e) = c - (a - Q(a)) - (e - Q(e)).$$

Da c durch 9 teilbar ist, ist nach Vorbemerkung auch $Q(a) + Q(e)$ durch 9 teilbar.

Nach (2) und (4) gilt

$$b + d = Q(a) + Q(c) + Q(c) + Q(e).$$

Da $Q(a) + Q(e)$ und $Q(c)$ durch 9 teilbar sind, ist auch $b + d$ durch 9 teilbar.

Die Zahlen b und d sind aber beide mindestens zweistellig. Wäre nämlich z.B. b einstellig, so wäre nach Gleichung (1): $Q(b) = b = a = Q(a)$. Setzt man dies in (2) ein, so ergibt sich $Q(c) = 0$, dies widerspricht $c > 0$.

Wenn aber b und d zweistellig sind und ihre Summe $b + d$ durch 9 teilbar ist, so muss

$$(8) \quad b + d \geq 27$$

gelten. Insgesamt kann man also mit (6) und (8) die Summe der fünf Zahlen wie folgt nach unten abschätzen:

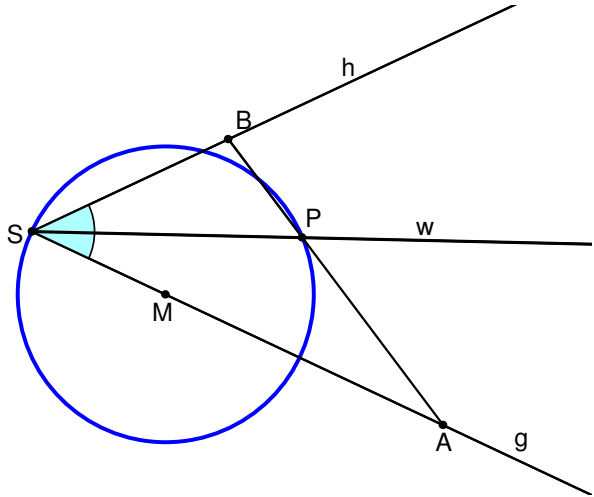
$$a + b + c + d + e = (b + d) + c + (a + e) = (b + d) + 2c \geq 27 + 2 \cdot 9 = 45.$$

Um zu beweisen, dass 45 der kleinste Wert ist, den die Summe haben kann, muss man fünf Zahlen mit Summe 45 angeben, die Paul nebeneinanderschreiben kann. In einer Verteilung mit Summe 45 muss $c = 9$ gelten, außerdem ist nach (7) $c = a + e$. Mögliche Zahlenreihen mit Summe 45, die alle Voraussetzungen erfüllen, sind z.B.

2	11	9	16	7	oder
5	14	9	13	4	

Aufgabe 2

Gegeben ist ein Winkel mit Scheitel S und Schenkeln g und h sowie der Winkelhalbierenden w . Nun wählt man einen Punkt M auf g . Der Kreis um M durch S schneidet w außer in S noch im Punkt P . Schließlich legt man durch P eine Gerade, die g in A und h in B schneidet.



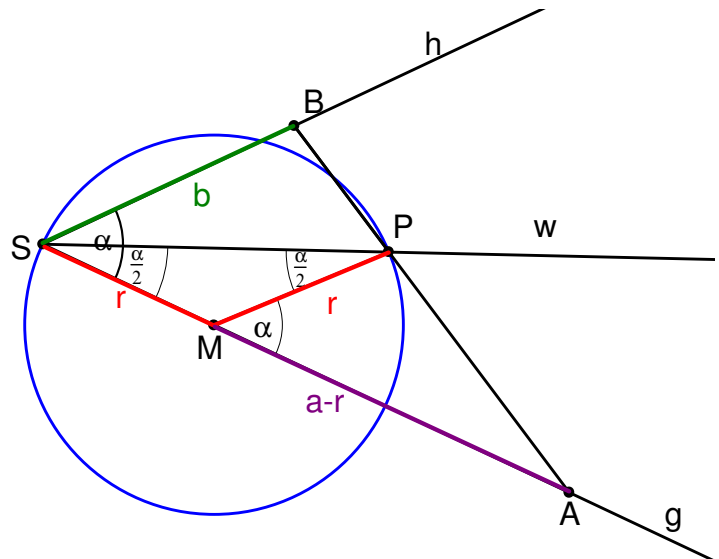
Es ist $a = \overline{SA}$, $b = \overline{SB}$ und $r = \overline{SM}$.

Beweise: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{r}$.

Beweisvorschlag (mit zweitem Strahlensatz):

Wir ergänzen die Strecke MP . Die Weite des gegebenen Winkels $\sphericalangle ASB$ sei α .

Das Dreieck SMP ist gleichschenkelig, denn SM und MP sind Radien des gegebenen Kreises, also gleich lang.



Die Basiswinkel im Dreieck SMP haben die Weite $\frac{\alpha}{2}$, denn w ist Winkelhalbierende des Winkels α . Somit hat der Winkel $\sphericalangle PMS$ nach dem Winkelsummensatz für Dreiecke die Weite $180^\circ - 2 \cdot \frac{\alpha}{2} = 180^\circ - \alpha$. Der zugehörige Nebenwinkel $\sphericalangle AMP$ hat demnach die Weite α . Somit sind die Gerade h und die Strecke MP nach der Umkehrung des Stufenwinkelsatzes parallel.

Wir können daher den zweiten Strahlensatz verwenden:

Es ergibt sich $\frac{b}{r} = \frac{a}{a-r}$.

Multipliziert man beide Seiten der Gleichung mit $r \cdot (a - r)$ so ergibt sich

$$b \cdot (a - r) = ar \quad \text{bzw.} \quad ba - br = ar \quad \text{oder} \quad br + ar = ba.$$

Dividiert man beide Seiten dieser Gleichung durch abr , so ergibt sich

$$\frac{br}{abr} + \frac{ar}{abr} = \frac{ba}{abr} \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{r}.$$

Aufgabe 3

Ein Paar von Rechtecken heißt befreundet, wenn die Maßzahl des Umfangs (in cm) des einen Rechtecks gleich der Maßzahl des Flächeninhalts (in cm^2) des anderen Rechtecks ist und umgekehrt.

Gib die Seitenlängen von allen Paaren befreundeter Rechtecke an, bei denen die Maßzahlen der Seitenlängen (in cm) natürliche Zahlen sind.

Lösung:

Wir schreiben $[a; b]$ für ein Rechteck dessen Seitenlängen in cm die Maßzahlen a und b hat, wobei $a \leq b$ gilt.

Dann sind die folgenden sieben Paare von Rechtecken befreundet:

- (1) $[4;4]$ und $[4;4]$
- (2) $[3;6]$ und $[3;6]$
- (3) $[2;10]$ und $[4;6]$
- (4) $[2;13]$ und $[3;10]$
- (5) $[1;34]$ und $[7;10]$
- (6) $[1;38]$ und $[6;13]$
- (7) $[1;54]$ und $[5;22]$

Alle anderen Paare von Rechtecken sind nicht befreundet.

Beweisvorschlag:

Gegeben sind zwei Rechtecke $[a; b]$ und $[c; d]$ mit $a \leq b$ und $c \leq d$. Hierbei seien a, b, c und d positive natürliche Zahlen.

Die beiden Rechtecke sind genau dann befreundet, wenn gilt:

$$a \cdot b = 2 \cdot (c + d) \quad \text{und} \quad c \cdot d = 2 \cdot (a + b).$$

Daraus folgt $a \cdot b - 2 \cdot (a + b) = a \cdot b - c \cdot d = 2 \cdot (c + d) - c \cdot d$.

Somit gilt (*) $a \cdot b - 2 \cdot (a + b) = 2 \cdot (c + d) - c \cdot d$.

Es ist entweder $a \cdot b - 2 \cdot (a + b) \leq 0$ oder $a \cdot b - 2 \cdot (a + b) > 0$. Im zweiten Fall ist wegen (*) $a \cdot b - 2 \cdot (a + b) = 2 \cdot (c + d) - c \cdot d > 0$, d.h. $c \cdot d - 2 \cdot (c + d) < 0$.

In jedem Fall ist für eines der beiden Rechtecke die Maßzahl des Flächeninhalts höchstens so groß wie die Maßzahl des Umfangs. Wir können annehmen, dass $[a; b]$ dieses Rechteck mit $a \cdot b \leq 2 \cdot (a + b)$ ist, sonst vertauschen wir die Rechtecke $[a; b]$ und $[c; d]$.

Fall 1: $a \cdot b = 2 \cdot (a + b)$. Wegen (*) gilt dann auch $c \cdot d = 2 \cdot (c + d)$.

$a \cdot b = 2 \cdot (a + b)$ ist äquivalent zu $a(b - 2) = 2b$. Da $2b > 0$ muss auch $a(b - 2) > 0$ sein. Somit muss $b > 2$ gelten.

$$\text{Es folgt } a = \frac{2b}{b-2} = \frac{2b-4+4}{b-2} = \frac{2(b-2)+4}{b-2} = 2 + \frac{4}{b-2}$$

Da a eine natürliche Zahl ist, muss $b - 2$ ein Teiler von 4 sein.

Es ist also $b = 3$, $b = 4$ oder $b = 6$.

Für $b = 3$ ergibt sich $a = \frac{2b}{b-2} = 6$, dies ist unmöglich, da $a \leq b$ angenommen wurde.

Für $b = 4$ ergibt sich $a = \frac{2b}{b-2} = 4$, also $[a; b] = [4; 4]$.

Für $b = 6$ ergibt sich $a = \frac{2b}{b-2} = 3$, also $[a; b] = [3; 6]$.

Da auch $c \cdot d = 2 \cdot (c + d)$ gibt es auch für das Rechteck $[c; d]$ nur die Möglichkeiten $[4; 4]$ und $[3; 6]$. Tatsächlich ist $[4; 4]$ befreundet zu $[4; 4]$, denn $4 \cdot 4 = 2 \cdot (4 + 4)$.

Außerdem ist $[3; 6]$ befreundet zu $[3; 6]$, denn $3 \cdot 6 = 2 \cdot (3 + 6)$.

Dies sind die einzigen beiden Möglichkeiten im Fall $a \cdot b = 2 \cdot (a + b)$.

Es sind die in den Lösungen angegebenen Fälle (1) und (2).

Fall 2: $a \cdot b < 2 \cdot (a + b)$, d.h. $a \cdot b \leq 2 \cdot (a + b) - 1$.

$a \cdot b \leq 2 \cdot (a + b) - 1$ ist äquivalent zu $a \cdot (b - 2) \leq 2b - 1$.

Fall 2.1: $b = 2$. Dann muss $a = 1$ oder $a = 2$ sein, wegen $a \leq b$.

Wenn $[a; b] = [1; 2]$, dann ist $2 = a \cdot b = 2 \cdot (c + d)$, also $c + d = 1$.

Dies ist unmöglich, da c und d positive natürliche Zahlen sind.

Wenn $[a; b] = [2; 2]$, dann ist $4 = a \cdot b = 2 \cdot (c + d)$, also $c + d = 2$. Es muss $c = d = 1$ gelten. Aber dann $1 = c \cdot d \neq 2 \cdot (2 + 2)$, die Paare $[2; 2]$ und $[1; 1]$ sind also nicht befreundet.

Fall 2.2: $b = 1$. Dann muss $a = 1$ sein, wegen $a \leq b$. Wegen $a \cdot b = 2 \cdot (c + d)$ muss aber eine der beiden Zahlen a oder b gerade sein, somit ist $[1; 1]$ unmöglich.

Fall 2.3: $b > 2$.

Aus $a \cdot (b - 2) \leq 2b - 1$ folgt $a \leq \frac{2b-1}{b-2} = \frac{2b-4+3}{b-2} = 2 + \frac{3}{b-2}$.

Aus $b - 2 \geq 1$ folgt $a \leq 2 + \frac{3}{1} = 5$.

Es bleiben also die fünf Möglichkeiten $a = 5, a = 4, a = 3, a = 2, a = 1$.

Fall 2.3.a: $a = 5$.

Aus $5 = a \leq 2 + \frac{3}{b-2}$ folgt $b - 2 \leq 1$. Das widerspricht $a \leq b$.

Fall 2.3.b: $a = 4$.

Für $a = 4$ ergibt sich aus $a \cdot (b - 2) \leq 2b - 1$ die Ungleichung

$4 \cdot (b - 2) \leq 2b - 1$ d.h. $b \leq 3,5$. Das widerspricht ebenfalls $a \leq b$.

Fall 2.3.c: $a = 3$.

Aus $a \cdot (b - 2) \leq 2b - 1$ ergibt sich nun $3 \cdot (b - 2) \leq 2b - 1$ oder $b \leq 5$.

Somit $3 \leq b \leq 5$. Da $a \cdot b = 2 \cdot (c + d)$ muss a oder b gerade sein.

Wegen $a = 3$ bleibt nur $b = 4$. Somit ist $2 \cdot (a + b) = 14 = cd$ und

$a \cdot b = 2 \cdot (c + d) = 12$. Aus $2 \cdot (c + d) = 12$ folgt $c = 6 - d$. Setzt man dies in

$cd = 14$ ein, so ergibt sich die quadratische Gleichung $d \cdot (6 - d) = 14$. Sie führt

auf $-d^2 + 6d - 14 = 0$ mit den Lösungen $d_{1,2} = \frac{-12 \pm \sqrt{90}}{-2}$. Diese Lösungen sind

keine natürliche Zahlen, daher ist der Fall $a = 3$ unmöglich.

Fall 2.3.d: $a = 2$.

In diesem Fall ist $a \leq 2 + \frac{3}{b-2}$ für alle natürlichen Zahlen b erfüllt.

Aus $a \cdot b = 2 \cdot b = 2 \cdot (c + d)$ folgt $b = c + d$. Aus $cd = 2 \cdot (a + b)$ folgt $cd = 2 \cdot (2 + b) = 4 + 2b = 4 + 2 \cdot (c + d) = 4 + 2c + 2d$.

Die Gleichung $cd = 4 + 2c + 2d$ ist äquivalent zu $c \cdot (d - 2) = 4 + 2d$. Hier $d > 2$, da sonst die linke Seite der Gleichung nicht positiv wäre.

Somit folgt aus $c \cdot (d - 2) = 4 + 2d$ die Gleichung $c = \frac{4+2d}{d-2} = \frac{2(d-2)+8}{d-2} = 2 + \frac{8}{d-2}$.

Also ist $d - 2$ ein Teiler von 8. Nach Voraussetzung ist außerdem $c \leq d$, also $2 + \frac{8}{d-2} \leq d$ oder $(d - 2)^2 \geq 8$ bzw. $d \geq 5$. Da $d - 2$ ein Teiler von 8 ist, folgt $d = 6$ oder $d = 10$.

Für $d = 6$ ist $c = 2 + \frac{8}{d-2} = 4$ und $b = c + d = 10$. Man erhält die befreundeten Rechtecke $[2;10]$ und $[4;6]$, also Lösung (3).

Für $d = 10$ ist $c = 2 + \frac{8}{d-2} = 3$ und $b = c + d = 13$. Man erhält die befreundeten Rechtecke $[2;13]$ und $[3;10]$, also Lösung (4).

Fall 2.3.e: $a = 1$.

In diesem Fall ist $b = 2c + 2d$ und

$$cd = 2 \cdot (a + b) = 2 \cdot (1 + b) = 2b + 2 = 4c + 4d + 2.$$

Daraus folgt $c(d - 4) = 4d + 2$. Hier $d > 4$ da sonst die linke Seite der Gleichung nicht positiv wäre. Somit kann man durch $d - 4$ dividieren und es folgt

$c = \frac{4d+2}{d-4} = \frac{4(d-4)+18}{d-4} = 4 + \frac{18}{d-4} \leq d$. Somit $(d - 4)^2 \geq 18$, also $d \geq 9$. Außerdem muss $d - 4$ ein Teiler von 18 sein. Es bleibt nur $d = 10$, $d = 13$, $d = 22$.

Für $d = 10$ ist $c = 4 + \frac{18}{d-4} = 7$ und $b = 2c + 2d = 34$. Man erhält die befreundeten Rechtecke $[1;34]$ und $[7;10]$, also Lösung (5).

Für $d = 13$ ist $c = 4 + \frac{18}{d-4} = 6$ und $b = 2c + 2d = 38$. Man erhält die befreundeten Rechtecke $[1;38]$ und $[6;13]$, also Lösung (6).

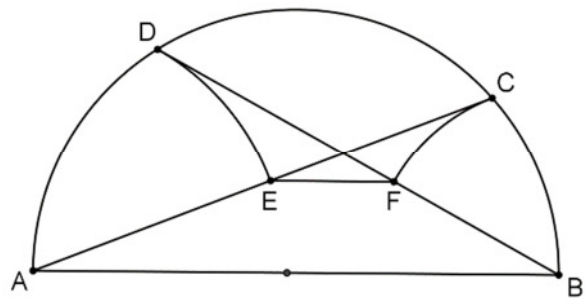
Für $d = 22$ ist $c = 4 + \frac{18}{d-4} = 5$ und $b = 2c + 2d = 54$. Man erhält die befreundeten Rechtecke $[1;54]$ und $[5;22]$, also Lösung (7).

Da alle Fälle abgedeckt sind, sind dies alle befreundeten Rechtecke gefunden.

Aufgabe 4

Auf einem Halbkreis über dem Durchmesser AB liegen zwei Punkte C und D so, dass sich die Sehnen AC und BD schneiden.

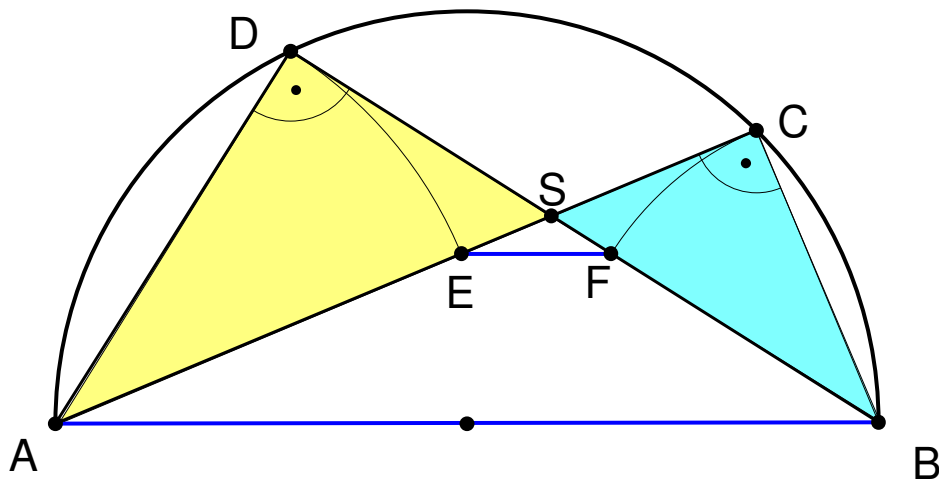
Der Kreis um A durch D schneidet AC in E , der Kreis um B durch C schneidet BD in F . Zeige: Die Strecken EF und AB sind parallel.



1. Beweisvorschlag (mit Ähnlichkeit und Umkehrung des 1. Strahlensatz):

Der Schnittpunkt von AD und BC wird mit S bezeichnet.

Die beiden Dreiecke ASD und $BS C$ sind ähnlich, da sie in ihren Winkeln übereinstimmen (Scheitelwinkel bei S , rechter Winkel nach Satz des Thales bei C bzw. D).



Aus der Ähnlichkeit folgt

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AS}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BS}}$$

Nach Konstruktion von E auf dem Kreis um A durch D gilt $\overline{AD} = \overline{AE}$.

Ebenso gilt $\overline{BC} = \overline{BF}$. Daher folgt

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{AS}} = \frac{\overline{BF}}{\overline{BS}}$$

Da $\overline{AE} = \overline{AS} - \overline{ES}$ und $\overline{BF} = \overline{BS} - \overline{FS}$ ergibt sich $\frac{\overline{AS} - \overline{ES}}{\overline{AS}} = \frac{\overline{BS} - \overline{FS}}{\overline{BS}}$ oder $1 - \frac{\overline{ES}}{\overline{AS}} = 1 - \frac{\overline{FS}}{\overline{BS}}$.

Es folgt somit

$$\frac{\overline{ES}}{\overline{AS}} = \frac{\overline{FS}}{\overline{BS}}$$

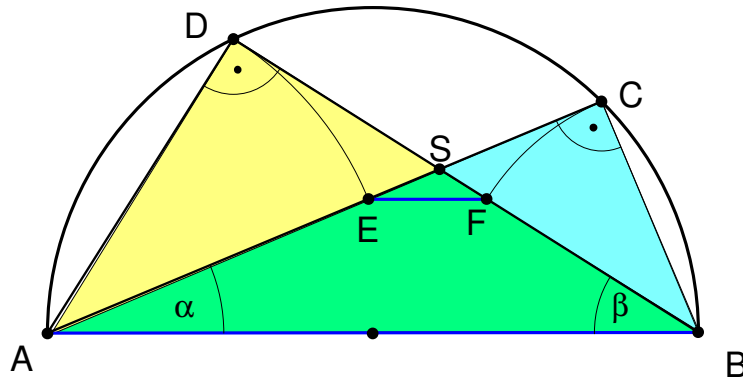
Nach der Umkehrung des ersten Strahlensatzes sind damit EF und AB parallel.

2. Beweisvorschlag (mit Trigonometrie):

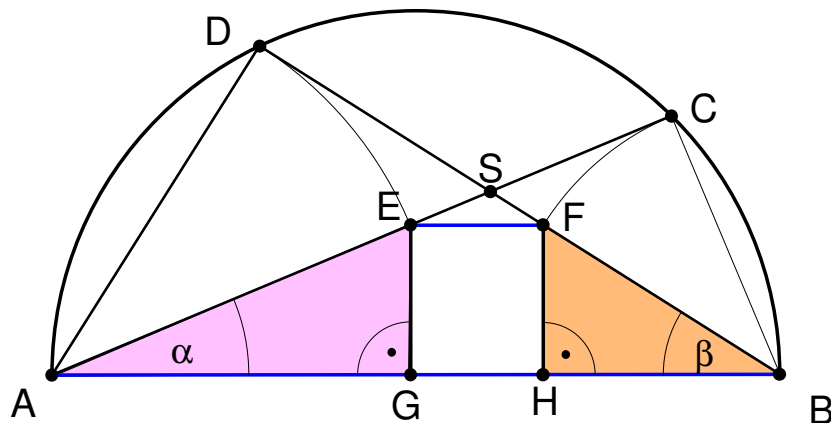
Nach dem Satz des Thales sind die Dreiecke ABC und ABD rechtwinklig. In ihnen gelten die Beziehungen $\sin(\alpha) = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$ und $\sin(\beta) = \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}}$.

Daraus und nach Konstruktion von E und F folgt

- (1) $\overline{AE} = \overline{AD} = \overline{AB} \cdot \sin(\beta)$ und
- (2) $\overline{BF} = \overline{BC} = \overline{AB} \cdot \sin(\alpha)$.



Das Lot von E auf die Strecke AB schneide die Strecke AB in G , das Lot von F auf AB schneide die Strecke AB in H .



In den rechtwinkligen Dreiecken AGE und BFH gilt:

$$\sin(\alpha) = \frac{\overline{GE}}{\overline{AE}} \text{ und } \sin(\beta) = \frac{\overline{FH}}{\overline{BF}}.$$

Daraus folgt $\overline{GE} = \overline{AE} \cdot \sin(\alpha)$ und $\overline{FH} = \overline{BF} \cdot \sin(\beta)$.

Setzt man darin die Beziehungen (1) und (2) für \overline{AE} und \overline{BF} ein, so erhält man

$$\overline{GE} = \overline{FH} = \overline{AB} \cdot \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$$

Da E und F den gleichen Abstand von der Strecke AB haben, sind die Strecken AB und EF parallel.