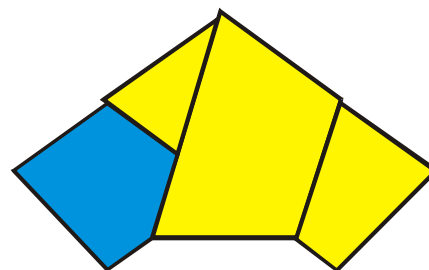


Landeswettbewerb Mathematik

Baden-Württemberg

Musterlösungen 2. Runde 2017/2018



Aufgabe 1

Eine Folge a_0, a_1, a_2, \dots natürlicher Zahlen ist durch einen Startwert $a_0 > 1$ und die folgende Vorschrift bestimmt:

$$a_{i+1} = \begin{cases} a_i : 3, & \text{falls } a_i \text{ durch 3 teilbar ist} \\ a_i + 5, & \text{falls } a_i \text{ nicht durch 3 teilbar ist} \end{cases} \quad (i \geq 0)$$

Für welche Startwerte a_0 gibt es ein n mit $a_n = 1$?

Lösung:

Genau dann, wenn die Zahl a_0 nicht durch 5 teilbar ist, gibt es ein n mit $a_n = 1$.

Beweisvorschlag:

Zunächst wird eine Hilfsaussage gezeigt.

Hilfsaussage:

- (1) Wenn a_0 durch 5 teilbar ist, dann sind alle Zahlen der Folge durch 5 teilbar.
- (2) Wenn a_0 nicht durch 5 teilbar ist, dann ist keine Zahl der Folge durch 5 teilbar.

Beweis der Hilfsaussage:

Zu (1): Wir zeigen die Aussage durch einen Widerspruchsbeweis.

Angenommen, a_0 ist durch 5 teilbar aber nicht alle anderen Zahlen der Folge sind durch 5 teilbar. Dann tritt in der Folge irgendwann an einer Stelle i erstmals eine solche nicht durch 5 teilbare Zahl a_i auf. Weil a_0 durch 5 teilbar ist, muss $i \geq 1$ sein und weil i der kleinste Index ist, für den a_i nicht durch 5 teilbar ist, muss a_{i-1} durch 5 teilbar sein. Dann gibt es eine natürliche Zahl b mit $a_{i-1} = 5b$.

Ist dabei $a_{i-1} = 5b$ durch 3 teilbar, so muss auch b durch 3 teilbar sein, da 5 teilerfremd zu 3 ist. Dann ist $b = 3c$ mit einer natürlichen Zahl c . Entsprechend der Bildungsvorschrift der Folge ergibt sich $a_i = a_{i-1} : 3 = 5b : 3 = 15c : 3 = 5c$. Daher wäre auch a_i durch 5 teilbar, was nicht sein kann.

Ist aber a_{i-1} nicht durch 3 teilbar, dann ist $a_i = a_{i-1} + 5 = 5b + 5 = 5(b + 1)$. Daher wäre auch hier a_i durch 5 teilbar, was ein Widerspruch ist, da a_i nicht durch 5 teilbar ist. Also war die ursprüngliche Annahme falsch und die Behauptung (1) ist bewiesen.

Zu (2): Auch hier zeigen wir die Aussage über einen Widerspruchsbeweis. Angenommen, a_0 ist nicht durch 5 teilbar, aber nicht alle anderen Zahlen der Folge sind nicht durch 5 teilbar. Dann tritt in der Folge irgendwann an einer Stelle i erstmals eine durch 5 teilbare Zahl a_i auf und es gibt eine natürliche Zahl b so, dass $a_i = 5b$ ist.

Weil a_0 nicht durch 5 teilbar ist, muss $i \geq 1$ sein und weil i der kleinste Index ist, für den a_i durch 5 teilbar ist, ist a_{i-1} nicht durch 5 teilbar.

Ist nun a_{i-1} durch 3 teilbar, so wäre entsprechend der Bildungsvorschrift der Folge $a_i = a_{i-1} : 3$ und daher auch $a_{i-1} = 3 \cdot a_i = 3 \cdot 5 \cdot b$. Daher wäre auch a_{i-1} durch 5 teilbar, was nicht sein kann.

Ist aber a_{i-1} nicht durch 3 teilbar, dann ist $a_i = a_{i-1} + 5$ bzw.

$$a_{i-1} = a_i - 5 = 5b - 5 = 5(b - 1).$$

Daher wäre auch hier a_{i-1} durch 5 teilbar, was ein Widerspruch ist. Also war die ursprüngliche Annahme falsch und die Behauptung (2) ist bewiesen.

Nun können wir zum Beweis der eigentlichen Behauptung kommen. Zu zeigen sind dabei zwei Richtungen:

(A) Wenn a_0 durch 5 teilbar ist, dann gibt es kein n mit $a_n = 1$.

(B) Wenn a_0 nicht durch 5 teilbar ist, dann gibt es ein n mit $a_n = 1$.

Zu (A): Wenn a_0 durch 5 teilbar ist, sind nach der Hilfsaussage (1) alle Zahlen der Folge durch 5 teilbar. Weil 1 nicht durch 5 teilbar ist, kann es demnach kein n geben, für das $a_n = 1$ ist.

Zu (B):

Sei a_0 nicht durch 5 teilbar.

Unter allen natürlichen Zahlen, die in der Folge auftreten, gibt es eine kleinste Zahl k . Es gilt also für mindestens einen Index $j \geq 0$, dass $a_j = k$ ist.

Außerdem $a_i \geq k$ für alle $i \geq 0$.

Angenommen, alle Zahlen der Folge wären größer als 5.

Dann wäre $a_j = k \geq 6$. Wir unterscheiden nun drei Fälle:

Fall 1: a_j ist durch 3 teilbar.

Dann ist $a_{j+1} = a_j : 3 < a_j = k$, weil $a_j \geq 6 > 0$. Das kann aber nicht sein, weil $a_i \geq k$ für alle $i \geq 0$ gilt.

Fall 2: a_j lässt beim Teilen durch 3 den Rest 1.

Dann ist $a_j = 3m + 1$ mit einer natürlichen Zahl $m \geq 2$. Nach der Bildungsvorschrift der Folge ist $a_{j+1} = a_j + 5 = (3m + 1) + 5 = 3m + 6 = 3(m + 2)$ durch 3 teilbar und deswegen folgt $a_{j+2} = a_{j+1} : 3 = 3(m + 2) : 3 = m + 2 < 3m + 1 = a_j = k$.

Hierbei wurde $m \geq 2$ und die daraus folgenden Beziehungen $2m > 1$, also

$$3m + 1 = m + 2m + 1 > m + 1 + 1 = m + 2 \text{ genutzt.}$$

Das sich ergebende $a_{j+2} < k$ ist aber ein Widerspruch zur Minimalität von k .

Fall 3: a_j lässt beim Teilen durch 3 den Rest 2.

Dann ist $a_j = 3m + 2$ mit einer natürlichen Zahl $m \geq 2$. Nach der Bildungsvorschrift der Folge ist $a_{j+1} = a_j + 5 = (3m + 2) + 5 = 3m + 7 = 3(m + 2) + 1$ ebenfalls nicht durch 3 teilbar und deswegen folgt $a_{j+2} = a_{j+1} + 5 = (3m + 7) + 5 = 3m + 12 = 3(m + 4)$. Diese Zahl ist aber durch 3 teilbar, so dass

$a_{j+3} = a_{j+2} : 3 = 3(m + 4) : 3 = m + 4 < 3m + 2 = a_j = k$ folgt.

Hierbei wurde $m \geq 2$ und die daraus folgenden Beziehungen $2m > 2$, also

$3m + 2 = m + 2m + 2 > m + 2 + 2 = m + 4$ genutzt.

Das sich ergebende $a_{j+3} < k$ ist aber ein Widerspruch zur Minimalität von k .

In allen drei möglichen Fällen ergibt sich also ein Widerspruch

Die Annahme, alle Zahlen der Folge wären größer als 5, kann also nicht wahr sein.

Somit muss $k \leq 5$ sein. Wir untersuchen nun die einzelnen Fälle für $a_j = k$:

Der Fall $a_j = k = 5$ kann nach der Hilfsaussage (2) nicht eintreten, da a_0 nicht durch 5 teilbar ist.

Wäre $a_j = k = 4$, dann ergeben sich die weiteren Folgeglieder: $a_{j+1} = 4 + 5 = 9$,

$a_{j+2} = 9 : 3 = 3$. Das ist aber wieder ein Widerspruch zur Minimalität von k .

Wäre $a_j = k = 3$, dann ergibt sich $a_{j+1} = 3 + 5 = 8$, wieder im Widerspruch zur Minimalität von k .

Wäre $a_j = k = 2$, dann ergeben sich die weiteren Folgenglieder: $a_{j+1} = 2 + 5 = 7$,

$a_{j+2} = 7 + 5 = 12$, $a_{j+3} = 12 : 3 = 4$, $a_{j+4} = 4 + 5 = 9$, $a_{j+5} = 9 : 3 = 3$ und $a_{j+6} = 3 : 3 = 1$.

Das ist aber ein Widerspruch zur Minimalität von k .

Also bleibt nur $a_j = k = 1$. Das bedeutet aber, dass die Zahl 1 in der Folge auftritt.

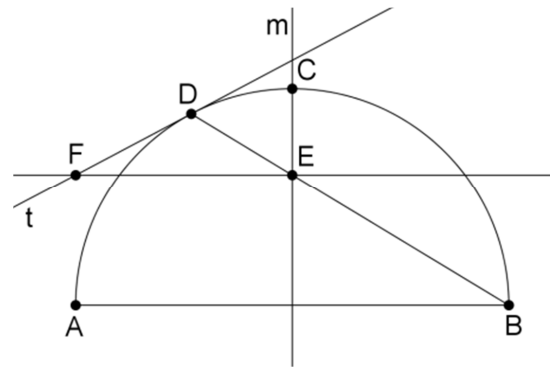
Das war zu zeigen.

Aufgabe 2

Der Halbkreis über der Strecke AB schneidet die Mittelsenkrechte m der Strecke AB im Punkt C .

Auf dem Viertelkreisbogen zwischen den Punkten A und C wird ein Punkt D gewählt und durch ihn die Tangente t an den Halbkreis gezeichnet.

Die Strecke BD schneidet m im Punkt E . Die Parallele zu AB durch E schneidet t im Punkt F .

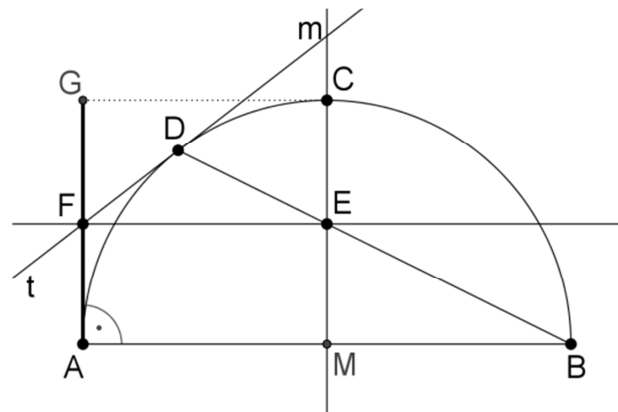


Auf welcher Bahn bewegt sich F , wenn sich D auf dem Viertelkreisbogen von A nach C bewegt, ohne den Punkt C zu erreichen?

Lösung:

Sei M der Mittelpunkt der Strecke AB . Weil $\overline{AM} = \overline{CM}$ und $\sphericalangle CMA = 90^\circ$ ist, gibt es einen Punkt G , für den das Viereck $AMCG$ ein Quadrat ist.

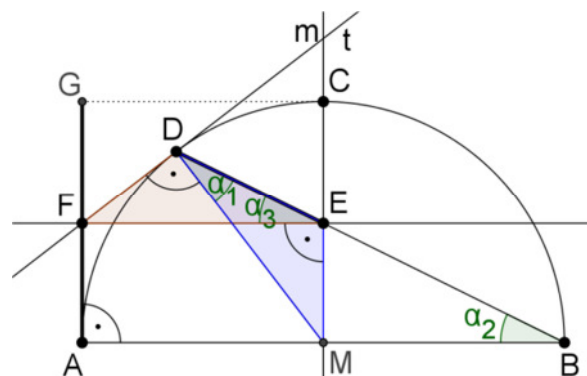
Der Punkt F bewegt sich auf der Strecke AG und erreicht jeden Punkt dieser Strecke, außer den Punkt G .



1. Beweisvorschlag (mit kongruenten Dreiecken):

Wenn $D = A$ ist, ist auch $F = A$. F liegt also in diesem Fall wie behauptet auf AG .

Andernfalls liegt D auf dem Viertelkreisbogen zwischen A und C und man kann wie in der Abbildung das Dreieck BDM und die Winkel α_1, α_2 und α_3 einzeichnen.



Weil die Radien MD und MB des Halbkreises gleich lang sind, ist das Dreieck BDM gleichschenkelig mit Basis BD . Deswegen gilt $\alpha_1 = \alpha_2$. Weil EF parallel zu AB verläuft, gilt nach dem Stufenwinkelsatz: $\alpha_2 = \alpha_3$. Insgesamt folgt damit $\alpha_1 = \alpha_3$ (1).

Weil m senkrecht auf AB steht und EF parallel zu AB verläuft, steht m auch senkrecht auf EF .

Die Tangente t steht senkrecht auf dem Radius MD .

Daher folgt $\sphericalangle DEM = 90^\circ + \alpha_3 = 90^\circ + \alpha_1 = \sphericalangle FDE$ (2).

Die beiden Dreiecke FED und DME stimmen wegen (1) und (2) also in der Seite DE und den beiden angrenzenden Winkeln überein, sind also nach Kongruenzsatz wsw kongruent.

Hieraus kann man schließen, dass $\overline{FE} = \overline{MD} = \overline{AM}$ gilt. Die Strecken AM und FE sind also gleichlang und parallel. Zusätzlich ist der Winkel $\sphericalangle FEM = 90^\circ$. Damit ist das Viereck $AMEF$ ein Rechteck.

Der Winkel $\sphericalangle MAF$ ist also auch gleich 90° . Somit liegt der Punkt F auf AG .

Da $\overline{AF} = \overline{ME} < \overline{MC}$, liegt F wie auf der Strecke AG zwischen A und G .

Umgekehrt wird jeder solche Punkt F auch durch eine geeignete Lage von D auf dem Viertelkreis erreicht. Der Punkt $F = A$ wird erreicht für $D = A$. Wenn F zwischen A und G liegt, so schneidet die Parallele zu AB durch F die Strecke MC in einem Punkt E . Das Viereck $AMEF$ ist ein Rechteck.

Die Gerade BE schneidet den Viertelkreis in einem Punkt D , der nicht C ist. Daher schneidet die Tangente an den Viertelkreis in D die Gerade EF in einem Punkt F' . Wie oben bewiesen, ist das Viereck $AMEF'$ ebenfalls ein Rechteck. Daher ist $F' = F$ und der Beweis ist vollständig geführt.

2. Beweisvorschlag (Rechnen im Koordinatensystem):

Die Figur wird so in ein Koordinatensystem gelegt, dass M im Ursprung liegt, C auf der x -Achse die Koordinaten $C(1|0)$ hat und A auf der y -Achse die Koordinaten $A(0|1)$ bekommt.

Der Punkt D habe die Koordinaten $D(x_D|y_D)$ mit nichtnegativen Werten x_D und y_D .

Im Fall $D = A$ folgt $F = A$. Hier liegt F also wie behauptet auf AG .

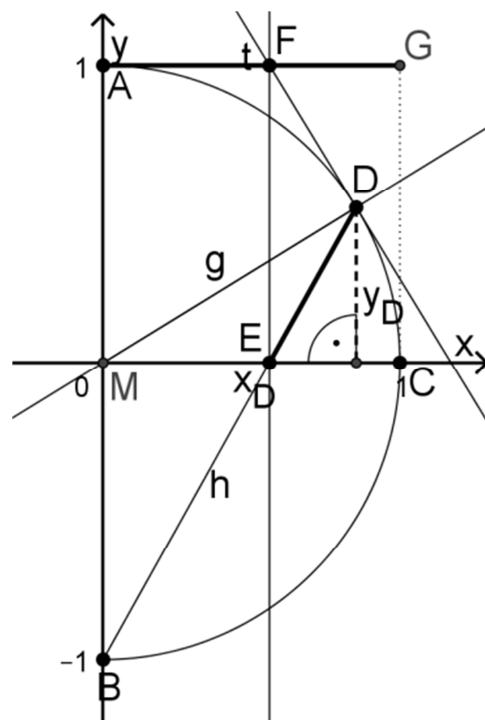
Wenn D nicht der Punkt A ist, so $0 < x_D < 1$ und $0 < y_D < 1$. Nach dem Satz des Pythagoras folgt auch

$$x_D^2 + y_D^2 = \overline{MD}^2 = 1.$$

Die Gerade g durch M und D hat die Steigung $m_g = \frac{y_D}{x_D}$. Die Tangente t verläuft senkrecht zu g durch den Punkt D .

t hat somit die Steigung $m_t = -\frac{1}{m_g}$.

Somit $m_t = -\frac{x_D}{y_D}$.



Ist r der y -Achsenabschnitt von t , so hat t die Gleichung $t: y = -\frac{x_D}{y_D}x + r$.

Da $D(x_D|y_D)$ auf t liegt, gilt $-\frac{x_D}{y_D} \cdot x_D + r = y_D$.

Somit $r = \frac{x_D}{y_D} \cdot x_D + y_D = \frac{x_D^2}{y_D} + \frac{y_D^2}{y_D} = \frac{1}{y_D}$. Hierbei wurde $x_D^2 + y_D^2 = 1$ benutzt.

Für die Tangente t ergibt sich damit die Gleichung: $t: y = -\frac{x_D}{y_D} \cdot x + \frac{1}{y_D}$. (*)

Um die Koordinaten des Punktes E zu ermitteln, wird die Gerade h durch die Punkte D und B betrachtet. Sie hat die Steigung $\frac{y_D+1}{x_D}$ und den y -Achsenabschnitt -1 .

Daher ergibt sich $h: y = \frac{y_D+1}{x_D} \cdot x - 1$.

Die x -Koordinate x_E von E ergibt sich aus $0 = \frac{y_D+1}{x_D} \cdot x - 1$ zu $x_E = \frac{x_D}{y_D+1}$.

Die y -Koordinate y_F von F erhält man schließlich, indem man $x_F = x_E$ in die Gleichung (*) von t einsetzt:

$$y_F = -\frac{x_D}{y_D} \cdot x_E + \frac{1}{y_D} = -\frac{x_D}{y_D} \cdot \frac{x_D}{y_D+1} + \frac{1}{y_D} = \frac{-x_D^2}{y_D(y_D+1)} + \frac{y_D+1}{y_D(y_D+1)} = \frac{-x_D^2+y_D+1}{y_D(y_D+1)}$$

Aus $y_D^2 = 1 - x_D^2$ folgt: $y_F = \frac{1-x_D^2+y_D}{y_D(y_D+1)} = \frac{y_D+y_D^2}{y_D^2+y_D} = 1$.

Die Koordinaten von F sind also $F\left(\frac{x_D}{y_D+1} | 1\right)$, der Punkt F liegt demnach auf der Geraden AG .

Um zu zeigen, dass F jeden Punkt mit den Koordinaten $(z|1)$ auf der Strecke AG außer G selbst annehmen kann, muss nur noch gezeigt werden, dass es für jede Zahl z mit $0 < z < 1$ eine Zahl x_D mit $0 < x_D < 1$ gibt, für die $\frac{x_D}{y_D+1} = \frac{x_D}{\sqrt{1-x_D^2}+1} = z$ gilt ($z = 0$ wird

durch $D = A$ erreicht).

Setzt man $x_D = \frac{2 \cdot z}{1+z^2}$, so ist sicher $x_D > 0$ und wegen $(z-1)^2 > 0$ folgt $z^2 + 1 > 2 \cdot z$, also $x_D = \frac{2 \cdot z}{1+z^2} < 1$. Für dieses x_D gilt tatsächlich:

$$\frac{x_D}{\sqrt{1-x_D^2}+1} = \frac{\frac{2 \cdot z}{1+z^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{2 \cdot z}{1+z^2}\right)^2}+1} = \frac{\frac{2 \cdot z}{1+z^2}}{\sqrt{\frac{(1+z^2)^2-4z^2}{(1+z^2)^2}+1}} = \frac{\frac{2 \cdot z}{1+z^2}}{\sqrt{\frac{(1-z^2)^2}{(1+z^2)^2}+1}} = \frac{\frac{2 \cdot z}{1+z^2}}{\frac{1-z^2}{1+z^2}+1} = \frac{\frac{2 \cdot z}{1+z^2}}{\frac{2}{1+z^2}} = z.$$

Damit ist alles gezeigt.

Bemerkung:

Die Formel $x_D = \frac{2 \cdot z}{1+z^2}$ für x_D ergibt sich durch Umformen von $\frac{x_D}{\sqrt{1-x_D^2}+1} = z$.

Denn $x_D = z \cdot \sqrt{1-x_D^2} + z$ bzw. $x_D - z = z \cdot \sqrt{1-x_D^2}$. Nach Quadrieren folgt weiter $x_D^2 - 2 \cdot x_D \cdot z + z^2 = z^2 - z^2 \cdot x_D^2$ und nach Subtraktion von z^2 und Division durch $x_D \neq 0$ schließlich $x_D - 2 \cdot z = -z^2 \cdot x_D$. Dies lässt sich nach x_D umformen: $x_D = \frac{2 \cdot z}{1+z^2}$.

Aufgabe 3

Bestimme die größte natürliche Zahl n , für die gilt: Das Produkt aller Teiler von n ist n^2 und die Summe aller Teiler von n ist $n + 2017$.

Lösung:

Die größte solche Zahl ist $n = 997 \cdot 1019 = 1\,015\,943$.

Beweisvorschlag:

Ein Teiler einer Zahl k heißt echter Teiler von k , wenn er von 1 und k verschieden ist.

Wir betrachten eine beliebige Zahl n , für die gilt: Das Produkt aller Teiler von n ist n^2 und die Summe aller Teiler von n ist $n + 2017$.

Dann muss n größer als 1 sein, denn die Summe aller Teiler von 1 ist gleich 1, und das ist nicht $1 + 2017$. Daher hat n mindestens die beiden verschiedenen Teiler 1 und n .

Weiter ist klar, dass n mindestens einen echten Teiler haben muss, da ansonsten die Summe aller Teiler von n gleich $n + 1$ wäre, was nicht gleich $n + 2017$ ist.

Der kleinste echte Teiler von n sei p . Die Zahl p ist eine Primzahl, denn anderenfalls hätte p einen echten Teiler, der dann auch ein echter Teiler von n und kleiner als p wäre. Das kann nicht sein, weil p ja der kleinste echte Teiler von n ist.

Mit p ist auch die Zahl $q = \frac{n}{p}$ ein echter Teiler von n . Wäre $p = q$, so wäre $n = p^2$, also wären 1, p und n die einzigen Teiler von n , und ihr Produkt wäre $1 \cdot p \cdot n < q \cdot p \cdot n = n^2$. Das Produkt der Teiler von n wäre also nicht n^2 . Folglich muss $q \neq p$ sein.

Die Zahl n hat also mindestens die vier verschiedenen Teiler 1, p , q und n , und das Produkt dieser vier Teiler ist $1 \cdot p \cdot q \cdot n = n^2$. Also kann n keinen weiteren Teiler besitzen, sonst wäre ja das Produkt aller Teiler größer als n^2 .

Damit ist gezeigt: Wenn das Produkt aller Teiler von n gleich n^2 und die Summe aller Teiler von n gleich $n + 2017$ ist, dann hat n genau zwei echte Teiler p und q mit $p < q$ und p ist eine Primzahl.

Nun unterscheiden wir zwei Fälle.

Fall 1: q ist keine Primzahl

Da alle Teiler von q auch Teiler von n sind, können nur die Zahlen 1, p und q Teiler von q sein, d.h. der einzige echte Teiler von q ist p .

Dann kann q in seiner Primfaktorzerlegung keine Primzahlen außer p enthalten, es ist also $q = p^k$ mit einer natürlichen Zahl $k > 1$. Wäre k dabei größer als 2, dann wäre p^2 ein weiterer echter Teiler von q , was nicht sein kann.

Also ist $q = p^2$.

Dann ist in Fall 1 also $n = p \cdot q = p^3$, die Teiler von n sind 1, p , p^2 und p^3 . Da die Summe aller Teiler $n + 2017$ ist, folgt $1 + p + p^2 + p^3 = n + 2017 = p^3 + 2017$. Somit $p + p^2 = 2016$.

Diese Gleichung hat aber keine ganzzahlige positive Lösung, denn $44 + 44^2 = 1980$ und $45 + 45^2 = 2070$. Mit wachsendem p wächst auch $p + p^2$. Folglich müsste p zwischen 44 und 45 liegen, was nicht sein kann. Also ist Fall 1 nicht möglich.

Fall 2: q ist eine Primzahl

Die Summe aller Teiler von n ist in diesem Fall $1 + p + q + n = n + 2017$, also gilt

$$p + q = 2016. \quad (*)$$

Dabei soll $n = p \cdot q$ maximal werden.

Weil $p < q$ ist, ist $p < 1008$. Die Zahl $x = 1008 - p$ ist demnach eine positive ganze Zahl.

Es gilt $p = 1008 - x$. Aus (*) folgt $q = 1008 + x$. Daher gilt:

$$n = p \cdot q = (1008 - x) \cdot (1008 + x) = 1008^2 - x^2.$$

An dieser Darstellung von n sieht man, dass n maximal ist, wenn x möglichst klein und so gewählt wird, dass $1008 - x$ und $1008 + x$ Primzahlen sind.

Damit letzteres gewährleistet ist, darf x nicht gerade und nicht durch 3 teilbar sein, weil sonst $1008 + x = 2 \cdot 3 \cdot 168 + x$ gerade bzw. durch 3 teilbar wäre.

Im Bereich $1 \leq x \leq 10$ bleiben dann nur die folgenden Möglichkeiten:

x	Sind $1008 - x$ und $1008 + x$ prim?
1	$1008 - 1 = 1007 = 19 \cdot 53$ ist nicht prim
5	$1008 - 5 = 1003 = 17 \cdot 59$ ist nicht prim
7	$1008 - 7 = 1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$ ist nicht prim

Daher muss $x \geq 11$ sein.

Für das kleinste nun noch mögliche $x = 11$ ergeben sich $1008 - x = 997$ und $1008 + x = 1019$. Mit einer Primzahlentabelle kann man prüfen, dass 997 und 1019 Primzahlen sind. Dies erkennt man auch wie folgt: Beide Zahlen sind aufgrund der bekannten Teilbarkeitsregeln nicht durch 2, 3 oder 5 teilbar.

Da $997 = 1001 - 4 = 7 \cdot 11 \cdot 13 - 4$ ist 997 nicht durch 7, 11 oder 13 teilbar, weil sonst auch 4 durch 7, 11 bzw. 13 teilbar sein müsste.

An den Darstellungen

$$997 = 2 \cdot 17 \cdot 29 + 11 = 52 \cdot 19 + 9 = 43 \cdot 23 + 8 = 32 \cdot 31 + 5$$

sieht man genauso, dass 997 auch nicht durch 17, 19, 23, 29 und 31 teilbar ist.

Wäre nun die Zahl 997 keine Primzahl, dann hätte 997 einen kleinsten echten Teiler p , der selbst eine Primzahl sein muss. Wie oben gesehen, wäre dann $p \geq 37$. Auch $\frac{997}{p}$ wäre dann ein echter Teiler von 997, weswegen $\frac{997}{p} \geq p$ bzw. $997 \geq p^2 \geq 37^2 = 1369$ folgen würde. Das ist ein Widerspruch. Also ist 997 eine Primzahl.

Genauso sieht man mithilfe der Darstellungen

$$1019 = 7 \cdot 11 \cdot 13 + 18 = 2 \cdot 17 \cdot 29 + 33 = 53 \cdot 19 + 12 = 44 \cdot 23 + 7 = 32 \cdot 31 + 27,$$

dass 1019 keinen Primteiler kleiner als 37 haben kann und wegen $37^2 = 1369 > 1019$ dann selbst eine Primzahl sein muss.

Somit ist das kleinstmögliche x mit $x = 11$ gefunden. Es gilt $p = 1008 - x = 997$ und $q = 1008 + x = 1019$. Daraus ergibt sich das größtmögliche n mit $n = p \cdot q = 997 \cdot 1019 = 1\,015\,943$.

Aufgabe 4

Gegeben ist ein Dreieck ABC . Der Mittelpunkt der Seite AB ist M . Eine Gerade durch M zerlegt das Dreieck in zwei Figuren mit gleichem Umfang.

Bestimme den Schnittwinkel, den diese Gerade mit der Seite AB einschließt, in Abhängigkeit von den Innenwinkeln des Dreiecks ABC .

Lösung:

Die Innenwinkel des Dreiecks bei A , B und C sind wie üblich mit α , β und γ bezeichnet. Dann schließt die Gerade mit AB die beiden Winkel $\alpha + \frac{1}{2} \cdot \gamma$ und $\beta + \frac{1}{2} \cdot \gamma$ ein. Der gesuchte Schnittwinkel ist daher der kleinere dieser beiden Winkel bzw., falls $\alpha = \beta$ ist, gleich 90° .

1. Beweisvorschlag:

Für den Verlauf der Gerade, die mit g bezeichnet wird, kann man die folgenden drei Fälle unterscheiden:

Fall 1: g schneidet die Strecke BC in einem inneren Punkt E .

Die Gerade g zerlegt das Dreieck ABC in das Viereck $AMEC$ und das Dreieck MBE , die nach der Voraussetzung der Aufgabe gleichen Umfang haben.

Es gilt also:

$$\overline{AM} + \overline{ME} + \overline{CE} + \overline{CA} = \overline{MB} + \overline{BE} + \overline{EM}.$$

Hieraus folgt wegen $\overline{AM} = \overline{MB}$, dass

$$\overline{CE} + \overline{CA} = \overline{BE} \text{ bzw. } \overline{BE} = \frac{1}{2} \cdot (\overline{BE} + \overline{CE} + \overline{CA}) = \frac{1}{2} \cdot (\overline{BC} + \overline{CA}) \text{ gilt. } (*)$$

Die Parallele zu g durch A schneidet die Gerade BC in einem Punkt F .

Nach Strahlensatz gilt dabei $\frac{\overline{BF}}{\overline{BE}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{BM}} = 2$. Also folgt $\overline{BF} = 2 \cdot \overline{BE}$.

Setzt man darin wegen (*) $\overline{BE} = \frac{1}{2} \cdot (\overline{BC} + \overline{CA})$ ein, so folgt $\overline{BF} = \overline{BC} + \overline{CA}$ ist.

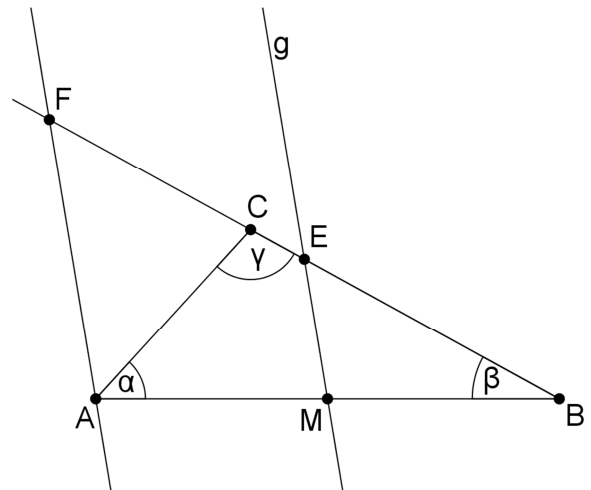
Daraus folgt, dass F und B auf verschiedenen Seiten von C auf der Gerade BC liegen und dass $\overline{FC} = \overline{BF} - \overline{BC} = \overline{CA}$ ist. Das Dreieck FAC ist also gleichschenkelig mit Basis AF .

Für die Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck gilt nach dem Winkelsummensatz $\sphericalangle CAF = \frac{1}{2} \cdot (180^\circ - \sphericalangle FCA)$. Nun ist $\sphericalangle FCA = 180^\circ - \gamma$, also $180^\circ - \sphericalangle FCA = \gamma$.

Es folgt $\sphericalangle CAF = \frac{1}{2} \cdot (180^\circ - \sphericalangle FCA) = \frac{1}{2} \cdot \gamma$.

Aufgrund des Stufenwinkelsatzes folgt schließlich $\sphericalangle BME = \sphericalangle BAF = \alpha + \frac{1}{2} \cdot \gamma$.

Die Gerade g schließt mit der Dreiecksseite AB also den Winkel $\sphericalangle BME = \alpha + \frac{1}{2} \cdot \gamma$ und dessen Nebenwinkel $\sphericalangle EMA = 180^\circ - \left(\alpha + \frac{1}{2} \cdot \gamma\right) = \alpha + \beta + \gamma - \left(\alpha + \frac{1}{2} \cdot \gamma\right) = \beta + \frac{1}{2} \cdot \gamma$ ein.



Der Schnittwinkel der Gerade g mit der Seite AB ist derjenige der kleinere dieser beiden Winkel (bei Gleichheit wäre der Schnittwinkel 90°).

Weil im vorliegenden Fall $\overline{BC} > \overline{BE} = \overline{AC} + \overline{CE} > \overline{AC}$ gilt und im Dreieck der längeren Seite der größere Innenwinkel gegenüberliegt, ist $\alpha > \beta$. Also ist $\beta + \frac{1}{2} \cdot \gamma$ der gesuchte Schnittwinkel.

Fall 2: g schneidet die Strecke AC in einem inneren Punkt E .

Durch Vertauschung der Bezeichnungen von A und B bzw. von α und β ergibt sich der Fall 1. Der Schnittwinkel ist hier $\alpha + \frac{1}{2} \cdot \gamma$ da $\beta > \alpha$.

Fall 3: g verläuft durch den Punkt C .

Die Gerade g zerlegt das Dreieck ABC in die beiden Dreiecke AMC und MBC , die nach der Voraussetzung der Aufgabe gleichen Umfang haben.

Es gilt also: $\overline{AM} + \overline{MC} + \overline{CA} = \overline{MB} + \overline{BC} + \overline{CM}$. Hieraus folgt wegen $\overline{AM} = \overline{MB}$, dass $\overline{CA} = \overline{BC}$ gilt. Das Dreieck ABC ist demnach gleichschenkelig mit Basis AB . Die Seitenhalbierende CM ist daher gleichzeitig die Höhe durch C im Dreieck ABC und steht senkrecht auf AB . Der gesuchte Schnittwinkel ist hier also 90° .

2. Beweisvorschlag:

Wie im 1. Beweisvorschlag kann man drei Fälle unterscheiden.

Fall 1: Die Gerade g durch M schneidet die Seite BC in einem inneren Punkt E .

Wie im 1. Beweisvorschlag folgt dann $\overline{BE} = \overline{AC} + \overline{CE}$ (*) und $\overline{BC} > \overline{AC}$.

Auf BC existiert also genau ein Punkt D so, dass $\overline{BD} = \overline{AC}$ ist.

Weil $\overline{BE} = \overline{AC} + \overline{CE} > \overline{AC} = \overline{BD}$ ist, liegen dann B, D, E und C in dieser Reihenfolge auf BC .

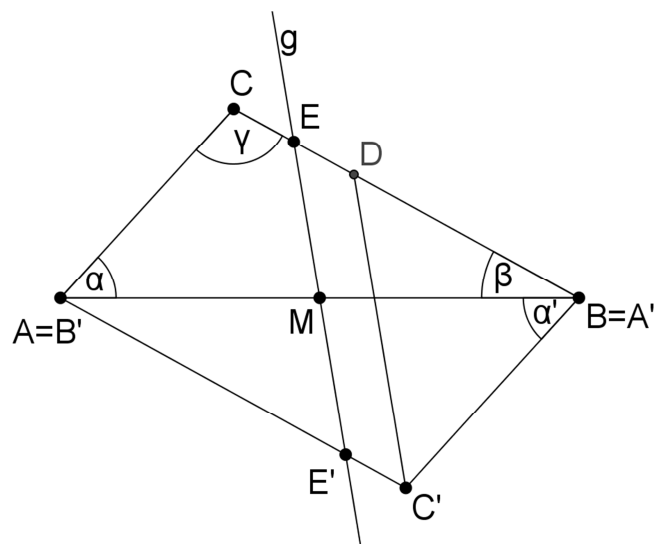
Außerdem ist wegen (*) dann $\overline{CE} = \overline{BE} - \overline{AC} = \overline{BE} - \overline{BD} = \overline{ED}$ (**).

Nun betrachtet man die Punktspiegelung an M . Dabei wird A auf B , B auf A , C auf einen Punkt C' und E auf einen Punkt E' abgebildet. Die Gerade g wird auf sich selbst abgebildet. Weil die Strecke BC und ihre Bildstrecke $B'C'$ parallel sind, sind auch die Strecken ED und $E'C'$ parallel. Außerdem sind sie wegen (**) und $\overline{E'C'} = \overline{EC}$ gleich lang. Daher ist das Viereck $E'C'DE$ ein Parallelogramm und EM ist parallel zu DC' (***).

Weil $\overline{BD} = \overline{AC} = \overline{A'C'} = \overline{B'C'}$ ist, ist das Dreieck $DC'B$ gleichschenkelig mit Basis DC' .

Deswegen kann man mithilfe der Innenwinkelsumme in den Dreiecken $DC'B$ und ABC schließen:

$$\sphericalangle C'DB = \frac{1}{2} \cdot (180^\circ - \sphericalangle DBC') = \frac{1}{2} \cdot (180^\circ - \beta - \alpha') = \frac{1}{2} \cdot (180^\circ - \beta - \alpha) = \frac{1}{2} \cdot \gamma.$$



Wegen (***) folgt dann mit Stufenwinkelsatz: $\sphericalangle MEB = \sphericalangle C'DB = \frac{1}{2} \cdot \gamma$. Damit ergibt sich schließlich mit der Innenwinkelsumme im Dreieck MBE :

$$\sphericalangle BME = 180^\circ - \beta - \frac{1}{2} \cdot \gamma = (\alpha + \beta + \gamma) - \beta - \frac{1}{2} \cdot \gamma = \alpha + \frac{1}{2} \cdot \gamma.$$

Wie im 1. Beweisvorschlag ergibt sich also, dass die Gerade g mit der Dreiecksseite AB den Winkel $\sphericalangle BME = \alpha + \frac{1}{2} \cdot \gamma$ und dessen Nebenwinkel

$$\sphericalangle EMA = 180^\circ - \left(\alpha + \frac{1}{2} \cdot \gamma\right) = \alpha + \beta + \gamma - \left(\alpha + \frac{1}{2} \cdot \gamma\right) = \beta + \frac{1}{2} \cdot \gamma$$

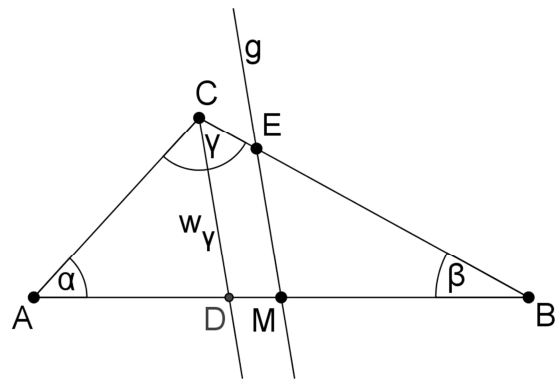
einschließt und dass der kleinere der beiden Winkel $\beta + \frac{1}{2} \gamma$ der Schnittwinkel ist.

Die **Fälle 2 und 3** werden in Analogie zum 1. Beweisvorschlag behandelt.

3. Beweisvorschlag (skizziert):

Wie in den vorigen Beweisen werden drei Fälle bezüglich des Schnittpunktes von g mit AC bzw. BC unterschieden.

Nur der 1. Fall, bei dem E innerer Punkt von BC ist, wird betrachtet und wie oben folgt dann auch $\overline{BE} = \frac{1}{2} \cdot (\overline{AC} + \overline{BC})$. (*) Die Winkelhalbierende w_γ des Innenwinkels $\sphericalangle ACB$ schneidet die Seite AB in einem Punkt D .



Nach dem Satz über die Winkelhalbierende teilt D die Seite AB im Verhältnis der Seitenlängen von AC und BC .

Es gilt also $\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$ bzw. nach Addition von 1 auf beiden Seiten $\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} + \frac{\overline{BD}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} + \frac{\overline{BC}}{\overline{BC}}$, also $\frac{\overline{AB}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AC} + \overline{BC}}{\overline{BC}}$. Umgeformt nach \overline{BD} erhält man hieraus: $\overline{BD} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{BC}}{\overline{AC} + \overline{BC}}$.

Berechnet man damit die Streckenverhältnisse

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{BM}} = \frac{\overline{BD}}{\frac{1}{2} \cdot \overline{AB}} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{BC}}{\frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot (\overline{AC} + \overline{BC})} = \frac{2 \cdot \overline{BC}}{\overline{AC} + \overline{BC}}$$

und mit (*)

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{BE}} = \frac{\overline{BC}}{\frac{1}{2} \cdot (\overline{AC} + \overline{BC})} = \frac{2 \cdot \overline{BC}}{\overline{AC} + \overline{BC}},$$

so sieht man, dass $\frac{\overline{BD}}{\overline{BM}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BE}}$ gilt. Nach der Umkehrung des Strahlensatzes folgt daraus, dass w_γ parallel zu g verläuft. Das wiederum lässt mit dem Stufenwinkelsatz auf $\sphericalangle MEB = \sphericalangle DCB = \frac{1}{2} \cdot \gamma$ schließen.

Damit ergibt sich dann aufgrund der Innenwinkelsumme im Dreieck MBE :

$$\sphericalangle BME = 180^\circ - \beta - \frac{1}{2} \cdot \gamma = \alpha + \beta + \gamma - \beta - \frac{1}{2} \cdot \gamma = \alpha + \frac{1}{2} \cdot \gamma.$$

Der Nebenwinkel $\beta + \frac{1}{2} \cdot \gamma$ dieses Winkels ist wieder, wie in den vorigen Beweisen, der gesuchte Schnittwinkel.