37. Landeswettbewerb Mathematik Baden-Württemberg

Lösungsbeispiele für die
Aufgaben der 1. Runde 2023/2024

Aufgabe 1

Florian schreibt eine dreistellige Zahl an die Tafel und erkennt: „Meine Zahl ist durch 3 teilbar.“ David vertauscht die ersten beiden Ziffern von Florians Zahl und bemerkt: „Meine Zahl ist durch 4 teilbar.“ Nun vertauscht Mirjam die letzten beiden Ziffern von Davids Zahl und stellt fest: „Meine Zahl ist durch 5 teilbar.“
Welche Zahl kann Florian an die Tafel geschrieben haben? Bestimme alle Möglichkeiten.

Lösung:

Die Zahl kann eine der folgenden sechs Zahlen sein: $522, 552, 582, 516, 546, 576$.

1. Beweis (mit Teilbarkeitsregeln):

Die von Florian angeschriebene Zahl nennen wir Florians Zahl, die Zahl, die durch Davids Zifferntausch entsteht nennen wir Davids Zahl und die Zahl, die durch Mirjams Tausch entsteht nennen wir Mirjams Zahl. Ist Florians Zahl z.B. die 723, dann ist Davids Zahl die 273 und Mirjams Zahl die 273.
Wir nutzen die folgenden Teilbarkeitsregeln

(T3) Eine natürliche Zahl ist genau dann durch 3 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 3 teilbar ist.

(T4) Eine natürliche Zahl ist genau dann durch 4 teilbar, wenn die aus den letzten beiden Ziffern gebildete zweistellige Zhal durch 4 teilbar ist.

(T5) Eine natürliche Zahl ist genau dann durch 5 teilbar, wenn ihre letzte Ziffer eine 0 oder eine 5 ist.

Wir beginnen mit der dritten Bedingung. Durch Davids Tausch gelangt die erste Ziffer von Florians Zahl in die Mitte. Durch Mirjams Tausch gelangt sie dann an die letzte Stelle. Da Mirjams Zahl durch 5 teilbar ist, muss die letzte Ziffer ihrer Zahl eine 0 oder eine 5 sein. Die 0 kann es aber nicht sein, weil Florians Zahl sonst mit 0 angefangen hätte. Es bleibt also nur die 5. Also ist die erste Ziffer von Florians Zahl (und die zweite Ziffer von Davids Zahl) eine 5.
Damit Davids Zahl durch 4 teilbar sein kann, muss wegen (T4) die letzte Ziffer eine 2 oder eine 6 sein, denn von den mit 5 beginnenden zweistelligen Zahlen sind nur 52 und 56 durch 4 teilbar. Folglich ist die letzte Ziffer von Florians Zahl eine 2 oder eine 6.
Damit Florians Zahl durch 3 teilbar sein kann, muss wegen (T3) ihre Quersumme durch 3 teilbar sein. Es ergeben sich folgende Möglichkeiten:

- Letzte Ziffer 2, erste Ziffer 5: die mittlere Ziffer kann dann nur 2, 5 oder 8 sein, denn $5+2+2=9$, $5+5+2=12$ und $5+8+2=15$ sind durch 3 teilbar.

- Letzte Ziffer 6, erste Ziffer 5: die mittlere Ziffer kann nur 1, 4 oder 7 sein, denn $5+1+6=12$, $5+4+6=15$ und $5+7+6=18$ sind durch 3 teilbar.

Für alle anderen mittleren Ziffern ist die Quaersumme nicht durch 3 teilbar.
Mit einer Probe überzeugt man sich, dass alle so in Frage kommenden Zahlen alle Bedingungen der Aufgabenstellung erfüllen:

522:	3 teilt 522, 4 teilt 252, 5 teilt 225.
552:	3 teilt 552, 4 teilt 552, 5 teilt 525.
582:	3 teilt 582, 4 teilt 852, 5 teilt 825.
516:	3 teilt 516, 4 teilt 156, 5 teilt 165.
546:	3 teilt 546, 4 teilt 456, 5 teilt 465.
576:	3 teilt 576, 4 teilt 756, 5 teilt 765.

Die einzigen möglichen Zahlen, die Florian an die Tafel geschrieben haben kann, sind also 522, 552, 582, 516, 546 und 576.

Variante 1:

Wir bezeichnen die Ziffern der von Florian angeschriebenen Zahl mit a, b und c, wobei $a \neq 0$. Dann hat Florians Zahl die Darstellung abc, Davids Zahl bac und Mirjams Zahl bca.

- Da bca durch 5 teilbar sein soll folgt mit (T4) und $a \neq 0$, dass $a = 5$ ist.
- Da bac durch 4 teilbar sein soll, folgt mit (T4) und $a = 5$, dass $c = 2$ oder $c = 6$ gilt.
- Falls $a = 5$ und $c = 2$ folgt wegen der Teilbarkeit von abc durch 3 und (T3), dass $a+b+c = 5+b+2 = 7+b$ durch 3 teilbar sein muss. Folglich muss $b = 2, b = 5$ oder $b = 8$ sein. Also kann Florians Zahl 522, 552 oder 582 sein.
- Falls $a = 5$ und $c = 6$ folgt wegen der Teilbarkeit von abc durch 3 und (T3), dass $a+b+c = 5+b+6 = 11+b$ durch 3 teilbar sein muss. Folglich muss $b = 1, b = 4$ oder $b = 7$ sein. Also kann Florians Zahl 516, 546 oder 576 sein.

Eine Probe bstätigt, dass jede der 6 Zahlen alle Bedingungen der Aufgabenstellung erfüllt.

2. Beweis (mit Vielfachen von 12):

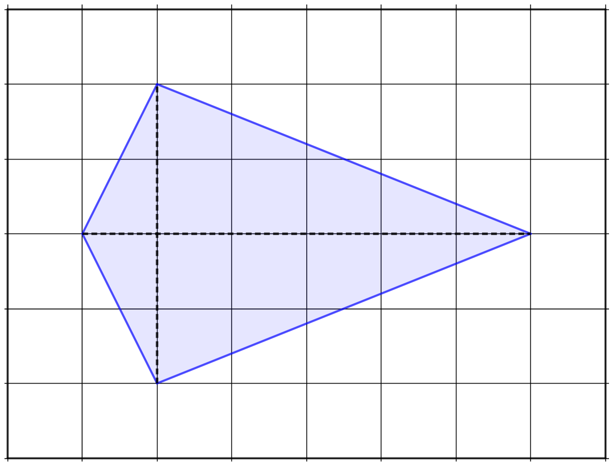
Wie im 1. Beweis zeigt man, dass in Davids Zahl die zweite Ziffer eine 5 sein muss. Da Florians Zahl durch 3 teilbar sein soll, muss die Quersumme von Florians Zahl durch 3 teilbar sein. Dann ist aber auch die Quersumme von Davids Zahl durch 3 teilbar und deswegen ist auch Davids Zahl durch 3 teilbar. Da Davids Zahl laut Aufgabenstellung auch durch 4 teilbar sein soll und weil 3 und 4 teilerfremd sind, muss Davids Zahl sogar durch $3 \cdot 4 = 12$ teilbar sein.
In der folgenden Tabelle werden nacheinander alle möglichen ersten Ziffern in Davids Zahl betrachtet und geprüft, ob eine Zahl der 12er-Reihe mit diesen beiden Ziffern beginnt. Es kann offenbar immer höchstens eine solche Zahl geben, da jeweils zehn aufeinanderfolgende Zahlen in Frage kommen.

1. Ziffer	Abschätzung (letzte Ziffer $*$)	mögliche Zahl
0	$4 \cdot 12 = 48 < 05* < 60 = 5 \cdot 12$	–
1	$13 \cdot 12 = 156$	156
2	$21 \cdot 12 = 252$	252
3	$29 \cdot 12 = 348 < 35* < 360 = 30 \cdot 12$	-
4	$38 \cdot 12 = 456$	456
5	$46 \cdot 12 = 552$	552
6	$54 \cdot 12 = 348 < 65* < 660 = 55 \cdot 12$	-
7	$63 \cdot 12 = 756$	756
8	$71 \cdot 12 = 852$	852
9	$79 \cdot 12 = 948 < 95* < 960 = 80 \cdot 12$	-

Also kommen nur die in der Tabelle genannten möglichen Zahlen als Davids Zahl in Frage. Diese entsprechen nach Vertauschen der ersten beiden Ziffern genau den sechs in der Lösung genannten Zahlen von Florian und eine Probe wie im 1. Beweis bestätigt, dass es sich auch wirklich um Lösungen der Aufgabe handelt.

Aufgabe 2

Kathi hat ein rechteckiges Stück kariertes Papier, das 8 Kästchen lang und 6 Kästchen breit ist. Sie möchte vier Gitterpunkte zu einem konvexen Drachenviereck verbinden, dessen Diagonalen auf den Linien des Papiers liegen. Dabei soll die Fläche des Drachenvierecks ein Viertel der Fläche des Papierstücks einnehmen. Bestimme, wie viele verschiedene, nicht deckungsgleiche Drachenvierecke möglich sind.
Hinweis: Bei einem konvexen Drachenviereck sind alle Innenwinkel kleiner als 180°.



Lösung:

Es gibt genau 5 verschiedene nicht deckungsgleiche Drachenvierecke.

1. Beweis :

Wir bezeichnen die Längen der beiden Diagonalen des Drachenvierecks wie auch die Diagonalen selbst mit e und f. Da die Eckpunkte des Drachenvierecks auf Gitterpunkten und die Diagonalen auf den Linien des Papiers liegen sollen, haben die Diagonalen e und f ganzzahlige Längen, die nicht größer als 8 sein können. Also sind e und f natürliche Zahlen mit $e \leq 8$ und $f \leq 8$.
Ein Kästchen hat den Flächeneinheit 1 und die Seitenlänge 1. Der Flächeninhalt des karierten Papiers beträgt dann $6 \cdot 8 = 48$. Das Drachenviereck soll dann einen Flächeninhalt von $A = 48/4 = 12$ besitzen. Bekanntlich wird der Flächeninhalt eines Drachenvierecks mit

der Formel

$$A = \frac{1}{2}ef \qquad (*)$$

berechnet. Wegen (*) gilt

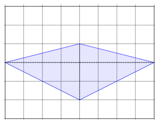
$$e \cdot f = 24 \quad .$$

Die Zahl 24 kann auf folgende Weise in das Produkt zweier natürlicher Zahlen zerlegt werden:

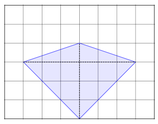
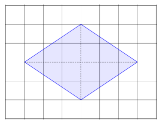
$$24 = 1 \cdot 24 = 2 \cdot 12 = 3 \cdot 8 = 4 \cdot 6 \quad .$$

Die ersten beiden Zerlegungen sind nicht möglich, da dann eine Diagonale länger als 8 wäre. Daher können die Diagonalen e und f nur die Längen $3, 4, 6$ oder 8 haben.
Da eine der beiden Diagonalen eines Drachenvierecks auch Symmetrieachse des Vierecks ist, muss sie auf der Mittelsenkrechten der anderen Diagonale liegen. Im folgenden sei die Diagonale e die Symmetrieachse (d.h. sie halbiert f). Damit e auf den Linien des Papiers liegen kann, muss f gerade sein. Da das Drachenviereck konvex sein soll, muss die Diagonale f die Diagonale e in einem inneren Gitterpunkt schneiden.
Nun betrachten wir folgende Fälle

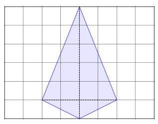
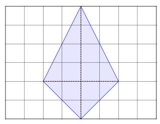
$e = 3$ Es ist $f = 8$. Die Diagonale e hat zwei innere Gitterpunkte, durch die f gehen kann. Die beiden möglichen Drachenvierecke sind deckungsgleich. Also gibt es in diesem Fall ein Drachenviereck.



$e = 4$ Es ist $f = 6$. Die Diagonale e hat drei innere Gitterpunkte, durch die f gehen kann. Zwei der drei möglichen Drachenvierecke sind deckungsgleich, bei dem dritten Drachenviereck halbieren sich beide Diagonalen, d.h. es ist eine Raute. Also ergeben sich in diesem Fall zwei weitere nicht deckungsgleiche Drachenvierecke.

$e = 6$ Es ist $f = 4$. Die Diagonale e hat fünf innere Gitterpunkte durch die f gehen kann. Es gibt zwei Paare deckungsgleicher Drachenvierecke und eine Raute. Diese Raute ergab sich aber bereits im Fall $e = 4, f = 6$.
Damit erhalten wir in diesem Fall zwei weitere nicht deckungsgleiche Drachenvierecke.

$e = 8$ Es ist $f = 3$. Daher liegt die Mittelsenkrechte von f nicht auf den Linien des Papiers und es gibt keine Drachenvierecke, die die Bedingungen der Aufgabenstellung erfüllen.

Also gibt es insgesamt 5 verschiedene nicht deckungsgleiche Drachenvierecke.

Aufgabe 3

Mara und Silvan spielen ein Spiel mit Perlen, die sich in zwei Gläsern befinden. Zu Beginn enthält das erste Glas 20 und das zweite Glas 23 Perlen. Abwechselnd führen sie je einen Spielzug durch. Ein Spielzug besteht darin, dass alle Perlen eines Glases entfernt und die Perlen des anderen Glases auf beide Gläser verteilt werden. Dabei darf nach einem Spielzug kein Glas leer sein. Wer zuerst keinen vollständigen Spielzug mehr durchführen kann, hat verloren. Mara beginnt.
Kann sie so spielen, dass sie sicher gewinnt? Begründe deine Antwort.

Lösung:

Mara kann so spielen, dass sie immer gewinnt, unabhängig davon, welche Züge Silvan macht. Sie hat also eine Gewinnstrategie.

1. Beweis (Allgemeine Lösung):

Mara kann so spielen, dass die folgenden beiden Bedingungen (A) und (B) immer erfüllt sind.

(A) Mara findet vor jedem ihrer Spielzüge ein Glas mit einer geraden Perlenzahl vor, die nicht Null ist. Das andere der beiden Gläser enthält eine ungerade Zahl an Perlen.

(B) Silvan findet vor jedem seiner Spielzüge in beiden Gläsern eine ungerade Perlenzahl vor.

Zu Beginn ist (A) erfüllt, denn Mara findet vor dem ersten Zug ein Glas mit 20 und ein Glas mit 23 Perlen vor, also ein Glas mit einer geraden Perlenzahl, während das andere Glas eine ungerade Perlenzahl enthält.
Sie leert nun das Glas mit der ungeraden Perlenzahl (also das Glas mit 23 Perlen) und verteilt das Glas mit der geraden Perlenzahl (also das Glas mit 20 Perlen) auf die beiden Gläser so, dass sich in beiden Gläsern eine ungerade Perlenzahl befindet. Z.B. könnte sie in das erste Glas eine Perle legen, in das zweite Glas die restlichen 19 Perlen. Beim ersten Zug von Silvan ist also Bedingung (B) erfüllt.
Egal wie Silvan nun bei seinem ersten Zug spielt, er kann nicht anders als ein Glas mit einer ungeraden Zahl an Perlen zu leeren und das andere Glas mit ebenfalls einer ungeraden Zahl an Perlen auf die beiden Gläser zu verteilen. Dabei muss er wieder in ein Glas eine gerade Anzahl von Perlen legen, in das andere Glas eine ungerade Anzahl, denn eine ungerade Zahl kann nur als Summe von einer geraden Zahl und einer ungeraden Zahl dargestellt werden. Wenn Mara z.B. wie oben beschrieben gespielt hat, also in ein Glas eine Perle, ins andere Glas 19 Perlen gelegt hat, so kann Silvan nur wie folgt weiterspielen: er leert das Glas mit einer Perle und verteilt die 19 anderen Perlen auf die beiden Gläser. Dabei hat er die folgenden neun Möglichkeiten:

(1) In ein Glas legt er 18 Perlen, in das andere 1 Perle;

(2) In ein Glas legt er 17 Perlen, in das andere 2 Perlen;

(3) In ein Glas legt er 16 Perlen, in das andere 3 Perlen; usw.
...

(9) In ein Glas legt er 10 Perlen, in das andere 9 Perlen.

Man erkennt: bei allen neun Möglichkeiten hinterlässt Silvan ein Glas mit einer geraden Perlenzahl, das andere mit einer ungeraden Perlenzahl. Wenn Silvan einen vollständigen Zug ausführt, so ist auch kein Glas leer, die gerade Zahl ist also nicht Null. Es ist also wieder Bedingung (A) für Maras zweiten Zug erfüllt.
Nun wird so weitergespielt. Bei einem beliebigen Zug von Mara, bei dem vor ihrem Zug Bedingung (A) erfüllt ist, leert sie das Glas mit der ungeraden Perlenzahl und teilt die gerade Perlenzahl auf die beiden Gläser so auf, dass in jedem Glas eine ungerade Zahl von Perlen liegt. Dies ist immer möglich. Nach den Spielregeln ist die gerade Perlenzahl nämlich mindestens 2, ansonsten hätte Silvan ein leeres Glas hinterlassen und er hätte schon davor verloren. Für eine gerade Zahl $n \geq 2$ ist z.B. $n = 1 + (n-1)$ eine Zerlegung von n in eine Summe von zwei ungeraden Zahlen 1 und $n-1$. Silvan findet somit zwei Gläser mit ungerader Perlenzahl vor. Also ist (B) erfüllt.
Bei einem beliebigen Zug von Silvan, vor dem (B) erfüllt ist, muss er eines der beiden Gläser mit ungerader Perlenzahl leeren und das andere Glas mit ebenfalls ungerader Perlenzahl auf die beiden Gläser aufteilen. Schreibt man eine ungerade Zahl als Summe zweier Zahlen, so ist notwendig eine Zahl gerade, die andere Zahl ungerade. Silvan muss also zwingend in einem Glas eine gerade Perlenzahl hinterlassen, im anderen eine ungerade Perlenzahl. Somit ist für Mara wieder (A) erfüllt.
Im Wechsel ist also für Mara (A) und für Silvan (B) erfüllt. Da die Perlenzahl stets abnimmt und Mara immer ein Glas mit einer geraden Perlenzahl vorfindet, so findet Mara nach einigen Spielzügen in einem Glas die kleinste von Null verschiedene gerade Perlenzahl vor, nämlich zwei Perlen. Sie leert das andere Glas und verteilt die beiden Perlen vom ersten Glas auf die beiden Gläser, so dass Silvan in beiden Gläsern nur noch eine Perle vorfindet. Er kann nicht mehr vollständig ziehen, da er nach seinem Zug ein Glas leer lassen muss. Also kann Mara so spielen, dass Silvan sicher verliert und sie sicher gewinnt.

2. Beweis (allgemeiner mit Gewinn- und Verluststellungen):

Jede Spielsituation kann durch ein Paar $(a; b)$ positiver ganzer Zahlen beschrieben werden, wobei ein Glas a Perlen, das andere b Perlen enthält und $a \leq b$ ist.
Durch erlaubte Züge erzeugen die Spieler aus einer solchen Spielsituation nach den Spielregeln eine andere; beispielsweise kann $(5; 11)$ durch Ausleeren des Glases mit 5 Perlen und Verteilen der 11 Perlen in $(3; 8)$ überführt werden.
Eine Spielsituation $(a; b)$ nennen wir gut, wenn wenigstens eine der beiden Zahlen a oder b gerade ist. Andernfalls, wenn also beide Zahlen a und b ungerade sind, nennen wir sie schlecht.

(A) Findet ein Spieler vor seinem Zug eine gute Spielsituation $(a; b)$ vor, so <u>kann</u> dieser Spieler in jedem Fall ziehen und eine schlechte Spielsituation erzeugen, denn wenigstens eine der beiden Zahlen a oder b ist eine gerade, positive ganze Zahl. OBdA[1] sei dies a. Dann ist $a \geq 2$ und der Spieler der am Zug ist kann, wie behauptet, die schlechte Spielsituation $(1; a-1)$ (oder jede andere mögliche Aufteilung in zwei ungerade Zahlen) erzeugen.

(B) Umgekehrt: Findet ein Spieler vor seinem Zug eine schlechte Spielsituation $(a; b)$ vor, so kann er entweder, wenn $a = b = 1$ ist, nicht mehr den Regeln entsprechend

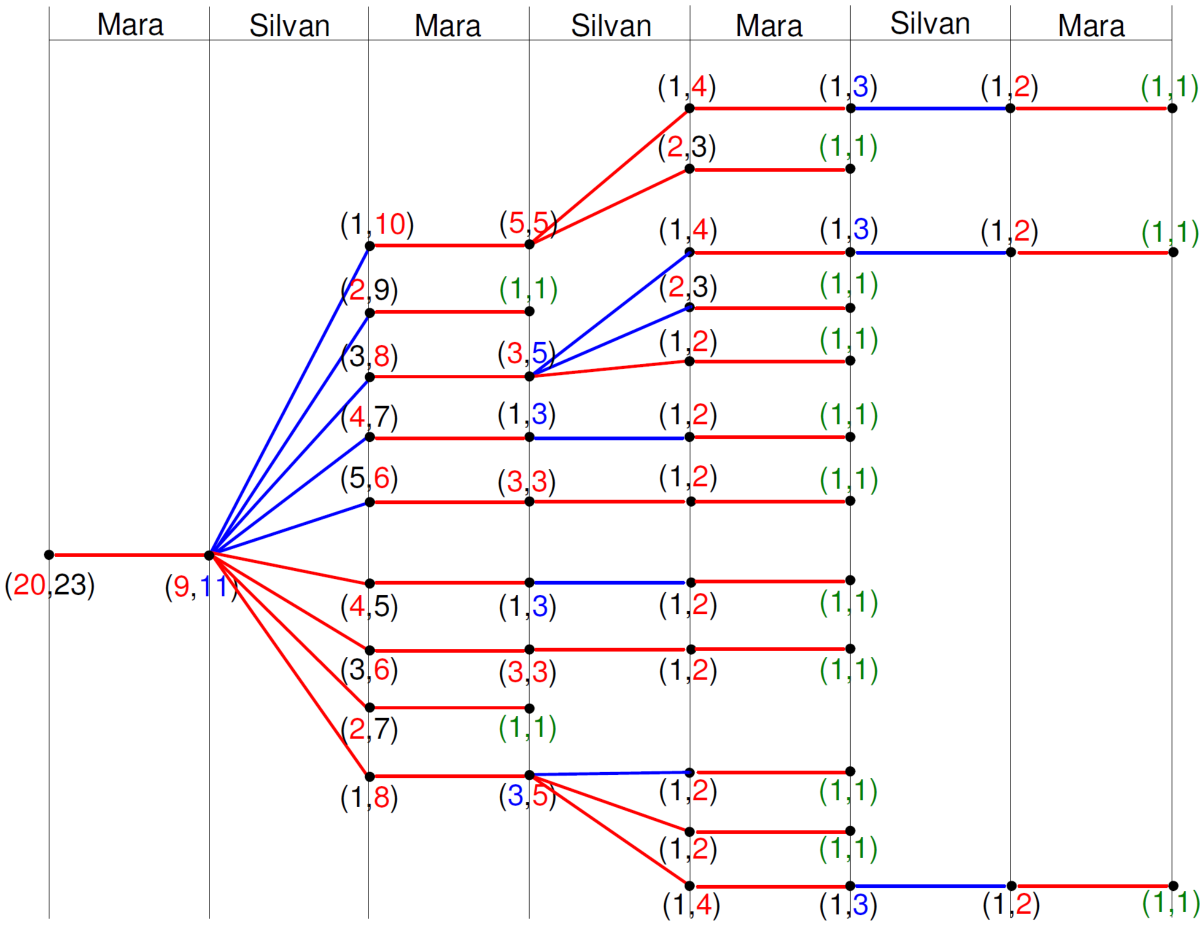
[1] ohne Beschränkung der Allgemeinheit

ziehen oder aber er muss in seinem Zug eine gute Spielsituation erzeugen. Ist nämlich $1 < a \leq b$, dann sind beide ungerade Zahlen a und b mindestens gleich 3 und ein Zug, der a oder b Perlen auf die beiden Gläser verteilt ist möglich und muss ausgeführt werden. Die Spielsituation $(a'; b')$, die dabei entsteht, ist aber in jedem Fall gut, denn andernfalls wären a' und b' ungerade und die Summe $a' + b'$ gerade, könnte also nicht gleich a oder b sein.

Da Mara zu Beginn die gute Spielsituation $(20; 23)$ vorfindet, gewinnt sie das Spiel nun in jedem Fall, wenn sie aus einer guten immer eine schlechte Spielsituation erzeugt, denn wegen (A) kann sie in jedem Fall entsprechend dieser Strategie ziehen; wegen (B) hat sie dann vor ihrem nächsten Zug gewonnen oder aber erhält wieder eine gute Spielsituation und kann, wie beschrieben, weiterspielen. Da sich die Gesamtzahl der Perlen in jedem Zug verringert, muss das Spiel irgendwann enden. Da Mara immer entsprechend ihrer Strategie ziehen kann, kann das Ende nur erreicht werden, wenn Silvan nicht mehr ziehen kann und Mara gewonnen hat.

3.Beweis (Vollständiges Baumdiagramm):

Wie im 2. Beweis wird mit (a, b) eine Spielsituation bezeichnet, bei der ein Glas a Perlen, das andere b Perlen enthält. Dabei ist $a \leq b$.

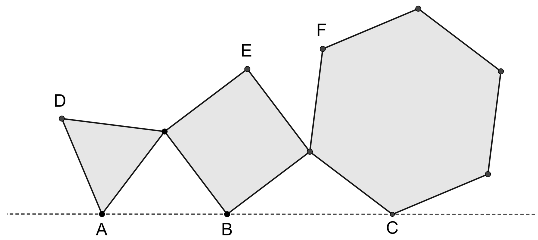


Das Baumdiagramm enthält alle Spielverläufe, wenn Mara nach folgender Strategie spielt: Sie teilt das Glas mit gerader Perlenzahl auf beide Gläser auf, wobei jedes Glas eine ungerade Perlenzahl enthält. Sie wählt dabei die beiden ungeraden Zahlen so, dass sie sich möglichst wenig unterscheiden. Bei ihren Zügen teilt sich der Baum nicht weiter auf,

da sie nach einer Strategie spielt. Nur bei Silvans Zügen müssen alle Möglichkeiten, die er hat, berücksichtigt werden.
An der Farbe der Verbindungslinien erkennt man, welches der beiden Gläser aufgeteilt wurde, die zugehörige Perlenzahl am vorherigen Knoten ist mit derselben Farbe dargestellt.
Wenn ein Spieler die Situation $(1; 1)$ vorfindet (beide Gläser enthalten eine Perle), so kann er nicht mehr regelgemäß weiterspielen, da ein Glas nach dem nächsten Spielzug leer bleiben muss. Das Spiel endet dann, der Spieler der am Zug ist, hat verloren. Im Baumdiagramm erkennt man, dass das Spiel immer endet, wenn Silvan am Zug ist. Mara gewinnt also in jedem Fall.

Aufgabe 4

Ein gleichseitiges Dreieck, ein Quadrat und ein regelmäßiges Sechseck haben alle die gleiche Seitenlänge. Wie in der Abbildung hat das Quadrat mit dem Dreieck und dem Sechseck jeweils eine gemeinsame Ecke. Die Punkte A, B und C liegen auf einer Geraden. Liegen auch die Punkte D, E und F auf einer Geraden? Begründe deine Antwort.



Lösung:

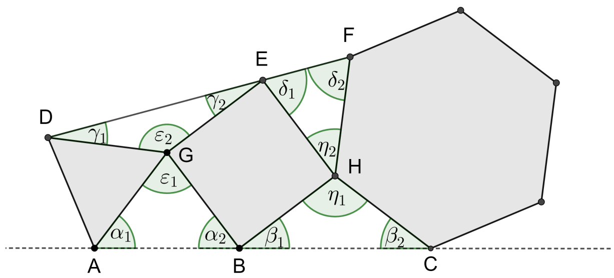
Die drei Punkte E, F und G liegen immer auf einer Geraden.

Vorbemerkung:

Da in der Aufgabenstellung auf die Lage wie in der Abbildung verwiesen wird, kann davon ausgegangen werden, dass die Punkte $A; B$ und C genau in dieser Reihenfolge auf der Geraden liegen und dass sich die drei Figuren nicht überlappen. Eine ansonsten eventuell nötige Diskussion verschiedener möglicher Lagen der Punkte muss also nicht erfolgen.

1. Beweis (durch Winkeljagd):

Wir bezeichnen die Winkel und Punkte wie in der nebenstehenden Abbildung angegeben.
Im gleichseitigen Dreieck hat jeder Innenwinkel die Größe 60°, im Quadrat 90° und im regelmäßigen Sechseck 120°.
Wir werden beweisen, dass
$\gamma_2 + 90° + \delta_1 = 180°$ gilt, denn daraus folgt dann, dass beim Punkt E ein gestreckter Winkel vorliegt und dass D, E und F auf einer Geraden liegen.



Die Dreiecke $\triangle ABG$, $\triangle BCH$, $\triangle EDG$ und $\triangle FEH$ sind gleichschenklig jeweils mit der Basis $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{ED}$ bzw. $\overline{FE}$. Daher gelten folgende Gleichungen:

$$\alpha_1 = \alpha_2 \quad , \quad \beta_1 = \beta_2 \quad , \quad \gamma_1 = \gamma_2 \quad , \quad \delta_1 = \delta_2 \quad . \tag{*}$$

Nun bestimmen wir alle auftretenden Winkel in Abhängigkeit von α_1:

- Am Punkt B liegt ein gestreckter Winkel vor. Daher gilt $\alpha_2 + 90° + \beta_1 = 180°$ und folglich mit (*)

$$\beta_1 = 90° - \alpha_1 \tag{1}$$

- Wegen der Innenwinkelsumme im Dreieck $\triangle ABG$ und (*) gilt $2\alpha_1 + \varepsilon_1 = 180°$, also

$$\varepsilon_1 = 180° - 2\alpha_1 \tag{2}$$

- Wegen der Innenwinkelsumme im Dreieck $\triangle BCH$ und (*) gilt $2\beta_1 + \eta_1 = 180°$, also ergibt sich mit (1)

$$\eta_1 = 180° - 2\beta_1 = 180° - 2(90° - \alpha_1) = 2\alpha_1 \tag{3}$$

- Am Punkt G ist ein Vollwinkel von 360°, weswegen $60° + \varepsilon_1 + 90° + \varepsilon_2 = 360°$ gilt. Mit (2) folgt dann

$$\varepsilon_2 = 210° - \varepsilon_1 = 210° - (180° - 2\alpha_1) = 30° + 2\alpha_1 \tag{4}$$

- Am Punkt H ist ein Vollwinkel von 360°, weswegen $90° + \eta_1 + 120° + \eta_2 = 360°$ gilt. Mit (3) folgt dann

$$\eta_2 = 150° - \eta_1 = 150° - 2\alpha_1 \tag{5}$$

- Wegen der Innenwinkelsumme im Dreieck $\triangle EDG$ und (*) gilt $2\gamma_2 + \varepsilon_2 = 180°$, und mit (4) folgt

$$\gamma_2 = 90° - \frac{1}{2}\varepsilon_2 = 90° - \frac{1}{2}(30° + 2\alpha_1) = 75° - \alpha_1 \tag{6}$$

- Wegen der Innenwinkelsumme im Dreieck $\triangle FEH$ und (*) gilt $2\delta_1 + \eta_2 = 180°$, und mit (5) folgt

$$\delta_1 = 90° - \frac{1}{2}\eta_2 = 90° - \frac{1}{2}(150° - 2\alpha_1) = 15° + \alpha_1 \tag{7}$$

Mit (6) und (7) folgt schließlich

$$\gamma_2 + 90° + \delta_1 = (75° - \alpha_1) + 90° + (15° + \alpha_1) = 180° \quad ,$$

womit die Behauptung bewiesen ist.

Variante :

Die Winkel und Punkte werden wie im 1. Beweis bezeichnet. Ebenso gilt

$$\alpha_1 = \alpha_2 \quad , \quad \beta_1 = \beta_2 \quad , \quad \gamma_1 = \gamma_2 \quad , \quad \delta_1 = \delta_2 \quad . \tag{*}$$

Nun untersuchen wir verschiedene Winkelsummen

- Wegen der Innenwinkelsumme in den Dreiecken $\triangle ABG$ und $\triangle BCH$ und (*) gilt

$$(2\alpha_2 + \varepsilon_1) + (2\beta_1 + \eta_1) = 180° + 180° = 360° \tag{1}$$

- Am Punkt B liegt ein gestreckter Winkel vor. Daher gilt $\alpha_2 + 90° + \beta_1 = 180°$ und folglich $\alpha_2 + \beta_1 = 90°$ bzw.

$$2\alpha_2 + 2\beta_1 = 180° \tag{2}$$

- Subtraktion der Gleichung (2) von Gleichung (1) führt zu

$$\varepsilon_1 + \eta_1 = 360° - 180° = 180° \tag{3}$$

- Aufgrund der beiden Vollwinkel an den Punkten G und H folgt

$$(60° + \varepsilon_1 + 90° + \varepsilon_2) + (90° + \eta_1 + 120° + \eta_2) = 360° + 360° = 720° \quad .$$

  Mit (3) folgt daher

$$\varepsilon_2 + \eta_2 = 720° - 360° - 180° = 180° \quad . \tag{4}$$

- Wegen der Innenwinkelsumme in den Dreiecken $\triangle EDG$ $\triangle FEH$ sowie (*) gilt

$$(2\gamma_2 + \varepsilon_2) + (2\delta_1 + \eta_2) = 180° + 180° = 360° \tag{5}$$

- Subtraktion der Gleichung (4) von Gleichung (5) führt zu $2\gamma_2 + 2\delta_1 = 360° - 180° = 180°$ bzw.

$$\gamma_2 + \delta_1 = 90° \quad . \tag{6}$$

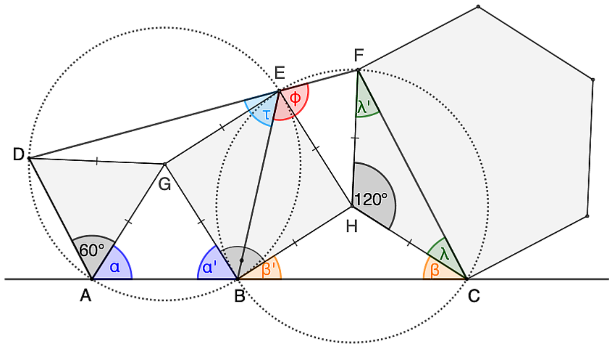
Mit (6) folgt, dass die beiden Winkel γ_2 und δ_1 zusammen mit dem rechten Winkel des Quadrats am Punkt E einen gestreckten Winkel bilden. Folglich liegen die Punkte D , E und F auf einer Geraden.

2. Beweis (mit Sehnenvierecken):

Bei den Vierecken $ABED$ und $BCFE$ handelt es sich um Sehnenvierecke: Die vier Punkte $A; B; E$ und D liegen auf einem Kreis um den Mittelpunkt G und die vier Punkte $BCFE$ liegen auf einem Kreis um den Mittelpunkt H, da die gegebenen drei regelmäßigen Vielecke die gleiche Seitenlänge besitzen.
In den gleichschenkligen Dreiecken $\triangle ABG$ und $\triangle BCH$ ergibt sich mit dem Basiswinkelsatz $\alpha' = \alpha$ und $\beta' = \beta$ (*). Da weiter die Punkte A, B und C auf einer Geraden liegen,

gilt: $180° = \angle CBA = \alpha' + 90° + \beta'$. Zusammen mit (*) folgt hieraus: $\alpha + \beta = 90°$.

Im gleichschenkligen Dreieck $\triangle CFH$ folgt aus $|\overline{HC}| = |\overline{HF}|$: $\lambda' = \lambda$ (Basiswinkelsatz). Da weiter die Innenwinkel im regelmäßigen Sechseck bekanntlich 120° betragen, ergibt sich mit der Innenwinkelsumme im Dreieck $\triangle CFH$: $\lambda = \frac{180°-120°}{2} = 30°$. In Sehnenvierecken ergänzen sich gegenüberliegende Innenwinkel zu 180°.

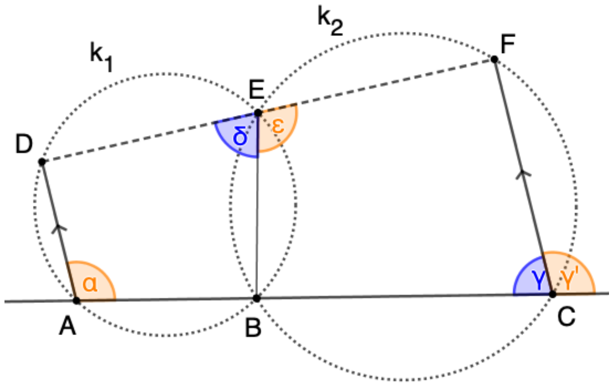


Mit den Bezeichnungen der Abbildung gilt also $\tau = 180° - (60° + \alpha) = 120° - \alpha$ und $\phi = 180° - (\beta + 30°) = 150° - \beta$. Hiermit folgt $\angle DEF = \tau + \phi = 120° - \alpha + 150° - \beta = 270° - (\alpha + \beta) = 270° - 90° = 180°$. Die Punkte $D; E$ und F liegen also auf einer Geraden.

Bemerkung:

Die Strecken $\overline{AD}$ und $\overline{CF}$ sind parallel: Der Stufenwinkel zum Winkel $\angle BAD$ berechnet sich als Nebenwinkel zum Winkel $\angle FCB$ zu $180° - (\beta + 30°) = 150° - \beta = 150° - (90° - \alpha) = 60° + \alpha = \angle BAD$. Allgemeiner kann man zeigen:

Schneiden sich zwei Kreise k_1 und k_2 in zwei Punkten B und E und liegen die Punkte $A; D$ auf k_1 und $C; F$ auf k_2 und liegen weiter die Punkte $A; B$ und C auf einer Geraden, gilt: Die Punkte $D; E$ und F liegen genau dann auf einer Geraden, wenn die Kreissehnen $\overline{AD}$ und $\overline{CF}$ parallel sind. Im Sehnenviereck $BCFE$ gilt $\gamma' = 180° - \gamma = \varepsilon$.



Die Punkte $D; E$ und F liegen nun genau dann auf einer Geraden, wenn $\delta + \varepsilon = 180° \Leftrightarrow 180° - \alpha + \lambda' = 180° \Leftrightarrow \alpha = \lambda' \Leftrightarrow CF \parallel AD$

Aufgabe 5

Merle bildet mit den Buchstaben des Wortes „MATHEMATIK“ den folgenden Quotienten zweier Produkte:

$$(M \cdot A \cdot T \cdot H \cdot E \cdot M \cdot A) : (T \cdot I \cdot K)$$

Nun ersetzt sie die Buchstaben durch natürliche Zahlen von 1 bis 7, gleiche Buchstaben durch gleiche Zahlen und verschiedene Buchstaben durch verschiedene Zahlen.
Bestimme die kleinstmögliche natürliche Zahl, die Merle dabei als Wert des Quotienten erhalten kann.

Lösung:

Die kleinstmögliche natürliche Zahl, die Merle erhalten kann, ist 10.

1. Beweis (mit Teilbarkeit und vollständiger Fallunterscheidung):

Es sei

$$x = (M \cdot A \cdot T \cdot H \cdot E \cdot M \cdot A) : (T \cdot I \cdot K) = \frac{A^2 \cdot M^2 \cdot E \cdot H}{I \cdot K} \cdot \frac{T}{T}$$

eine natürliche Zahl, welche die Bedingungen der Aufgabenstellung erfüllt.
Für $A = 1, M = 2, E = 6, H = 5, I = 4, K = 3$ und $T = 7$ gilt tatsächlich

$$x = \frac{1^2 \cdot 2^2 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3} \cdot \frac{7}{7} = 10\,.$$

Wir zeigen nun, dass immer $x \geq 10$ gilt:
Da der Faktor 7 eine Primzahl ist und daher kein Produkt aus Zahlen von 1 bis 6 teilt, können weder I noch K gleich 7 sein, da sonst x keine natürliche Zahl wäre.
Außerdem können weder I noch K gleich 5 sein, da der Faktor 5 eine Primzahl ist und deshalb kein Produkt aus Zahlen von 1 bis 4 und 7 teilt, weswegen x dann keine natürliche Zahl wäre.
Von den Buchstaben A, M E, H und T muss also einer den Wert 5 und einer den Wert 7 annehmen. Folglich hat zumindest einer der Buchstaben A, M, E oder H den Wert 5 oder 7 und es folgt
Die Zahl x ist durch 5 oder 7 teilbar (*).
Wir betrachten nun A und M und führen eine vollständige Fallunterscheidung durch:

- Falls A oder M den Wert 7 hat, so ist x durch 49 teilbar und damit $x \geq 49$.
- Falls A oder M den Wert 5 hat, so ist x durch 25 teilbar und damit $x \geq 25$.
- Falls A oder M den Wert 4 hat, so ist $A^2 \cdot M^2 \cdot E \cdot H$ durch 16 teilbar. Der Primfaktor 2 kommt dann nur noch in 2 und 6 jeweils einmal vor. Daher kann $I \cdot K$ nicht durch 8 teilbar sein. Damit ist x durch 4 teilbar. Wegen (*) ist x durch 20 oder 28 teilbar und somit $x \geq 20$.
- Falls A oder M den Wert 3 oder 6 hat, so ist $A^2 \cdot M^2 \cdot E \cdot H$ durch 9 teilbar. Der Primfaktor 3 kommt dann nur noch in 6 bzw. 3 jeweils einmal vor. Daher kann $I \cdot K$ nicht durch 9 teilbar sein. Damit ist x durch 3 teilbar. Wegen (*) ist x durch 15 oder 21 teilbar und somit $x \geq 15$.

- Es bleibt noch der Fall, $A = 1$ und $M = 2$ (bzw. $A = 2$ und $M = 1$).
  Dann kann nicht $I = 4$ und $K = 6$ (bzw. $I = 6$ und $K = 4$) sein, da sonst $I \cdot K$ durch 8 und $A^2 \cdot M^2 \cdot E \cdot H$ nicht durch 8 teilbar wären und folglich x keine natürliche Zahl mehr wäre.
  Deshalb ist $A^2 \cdot M^2 \cdot E \cdot H$ durch 8 teilbar, während $I \cdot K$ nicht durch 8 teilbar ist. Somit ist x durch 2 teilbar und wegen (*) durch 10 oder 14 teilbar. Somit $x \geq 10$.

Deshalb ist $x = 10$ die kleinstmögliche natürliche Zahl, die Merle erhalten kann.

Variante (skizziert):

Wie im 1. Beweis zeigt man, dass $x = 10$ möglich ist, weder I noch K gleich 5 oder 7 sein kann und dass x durch 5 oder 7 teilbar ist. Wäre $x < 10$, dann müsste also $x = 5$ oder $x = 7$ sein. Im Fall $x = 5$ muss zum einen entweder $E = 5$ oder $H = 5$ sein, damit x durch 5 und nicht durch 25 teilbar ist, zum anderen muss $T = 7$ sein, damit x nicht auch durch 7 teilbar ist. Daher folgt, wenn man oBdA $H = 5$ wählt:

$$\begin{aligned}
5 = \frac{A^2 \cdot M^2 \cdot E \cdot 5}{I \cdot K} \cdot \frac{7}{7} &\Leftrightarrow A^2 \cdot M^2 \cdot E = I \cdot K \\
&\Leftrightarrow A \cdot M \cdot (A \cdot M \cdot E \cdot I \cdot K) = I^2 \cdot K^2 = (I \cdot K)^2 \\
&\Leftrightarrow A \cdot M \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6) = (I \cdot K)^2, (\text{weil } \{A, M, E, I, K\} = \{1, 2, 3, 4, 6\}) \\
&\Leftrightarrow A \cdot M \cdot 144 = (I \cdot K)^2
\end{aligned}$$

Damit $A \cdot M \cdot 144 = A \cdot M \cdot 12^2$ eine Quadratzahl sein kann, muss $A \cdot M$ eine Quadratzahl sein. Weil $A \cdot M \geq 1 \cdot 2$ ist, muss $A \cdot M \geq 4$ und daher $(I \cdot K)^2 \geq 4 \cdot 144 \Leftrightarrow I \cdot K \geq 24$ sein. Das geht nur mit $\{I; K\} = \{4; 6\}$. Dann wäre aber $A^2 \cdot M^2 \cdot E = 24$ mit $\{A; M; E\} = \{1; 2; 3\}$. Weil 24 nicht durch 9 teilbar ist, muss dabei $E = 3$ sein. Dann ist aber $A^2 \cdot M^2 \cdot E = 1^2 \cdot 2^2 \cdot 3 = 12 \neq 24$. Genauso wird der Fall $x = 7$ zum Widerspruch geführt. Es muss also $x \geq 10$ sein.

2. Beweis (mit Teilbarkeit und Abschätzung):

Wie im ersten Beweis bezeichnen wir den betrachteten Quotienten mit

$$x = (M \cdot A \cdot T \cdot H \cdot E \cdot M \cdot A) : (T \cdot I \cdot K) = \frac{A^2 \cdot M^2 \cdot E \cdot H}{I \cdot K} \cdot \frac{T}{T}, \tag{1}$$

sehen, dass für $A = 1, M = 2, E = 6, H = 5, I = 4, K = 3$ und $T = 7$ tatsächlich

$$x = \frac{1^2 \cdot 2^2 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3} \cdot \frac{7}{7} = 10$$

gilt und erkennen, dass aus Teilbarkeitsgründen K und I weder 5 noch 7 sein können. Wir wollen zeigen, dass $I \cdot K$ höchstens 12 sein kann. Falls die größere von beiden Zahlen nicht größer als 4 ist, dann kann $I \cdot K$ höchstens $3 \cdot 4 = 12$ sein. Damit $I \cdot K$ also größer als 12 sein kann, muss die größere von beiden Zahlen 6 sein und die kleinere 3 oder 4 sein. Wir betrachten nun beide Fälle

- $I \cdot K = 4 \cdot 6$: Dann ist der Nenner von x durch 8 teilbar, der Zähler aber nicht (von den Zahlen A, M, E, H, T ist eine gleich 2, alle anderen sind ungerade, also ist der Zähler höchstens durch 4, aber nicht durch 8 teilbar). Daher ist x dann nicht ganzzahlig.

- $I \cdot K = 3 \cdot 6$: Dann ist der Nenner von x durch 9 teilbar, der Zähler aber nicht (von den Zahlen A, M, E, H, T ist keine durch 3 teilbar). Daher ist x dann nicht ganzzahlig.

Nun erweitern wir den Bruch in (1) mit $I \cdot K$:

$$x = \frac{A^2 \cdot M^2 \cdot E \cdot H \cdot I \cdot K \cdot T}{(I \cdot K)^2 \cdot T}, \tag{2}$$

Im Zähler steht jede der Zahlen 1 bis 7 als Faktor. Da A und M jeweils quadratisch auftreten, ist der Wert des Zählers mindestens $7! \cdot 1 \cdot 2 = 7 \cdot 6! \cdot 2 = 7 \cdot 1440$.
Andererseits ist der Nenner nicht größer als $12^2 \cdot 7 = 144 \cdot 7$.
Schließlich folgt

$$x \geq \frac{7 \cdot 1440}{144 \cdot 7} = 10\,.$$

Damit ist gezeigt, dass x mindestens 10 sein muss, was den Beweis vervollständigt.

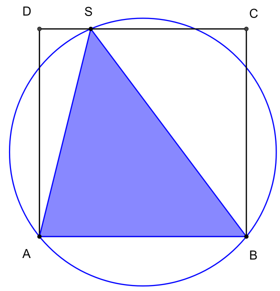
Bemerkung:

Lösungsversuche, bei denen beispielsweise argumentiert wird, man müsse, um ein kleines x zu erhalten, alle Variablen im Zähler möglichst klein wählen und insbesondere A und M (wegen des Exponenten 2) „besonders klein“, sind in der Regel schwer zu einer vollständigen Lösung auszubauen. Bei einem solchen Vorgehen wird angenommen, man könne die Belegung der Buchstaben im Zähler und im Nenner getrennt voneinander klein bzw. groß wählen: Diese Wahlen sind aber nicht unabhängig. So könnte theoretisch eine Entscheidung für eine besonders große Zahl im Nenner dazu führen, dass später im Zähler nicht mehr die kleinstmöglichen Zahlen gewählt werden können, so dass der Quotient eben nicht minimal wird, wenn man in jedem Schritt der Belegung immer „das Kleinste“ oder „das Größte“ wählt. Eine solche schrittweise lokale Optimierung führt nicht immer zu einem globalen, also insgesamt wirklich besten Ergebnis. Als Beispiel betrachte man folgende falsche Argumentation:
Man begründet zunächst wie im 1. Beweis, dass in $\frac{A^2 \cdot M^2 \cdot E \cdot H}{I \cdot K}$ die Buchstaben I und K nicht 7 und nicht 5 sein können. Um den Quotienten möglichst klein zu machen, muss die nun größte Zahl 6 im Nenner auftauchen, also wählen wir $I = 6$. Dann kann K nicht 4 sein, weil ansonsten der Nenner durch 8 aber der Zähler sicher nicht durch 8 teilbar ist, und K kann auch nicht 3 sein, weil ansonsten der Zähler nicht durch 3 teilbar wäre, der Nenner aber schon. Also muss man für $K = 2$ wählen, um wieder den Nenner möglichst groß zu machen. Um den Zähler klein zu machen, muss man wegen der Exponenten 2 bei A und M diesen beiden Buchstaben die kleineren noch übrigen Zahlen, also 1 und 3 zuweisen und den anderen beiden Buchstaben die nächstkleineren Zahlen 4 und 5. Es ergibt sich so

$$x = \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 4 \cdot 5}{6 \cdot 2} = 15$$

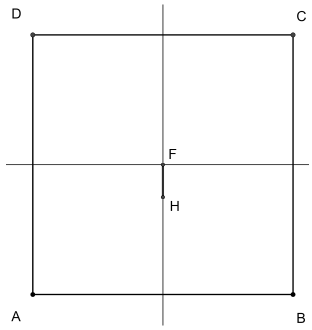
Dies ist also die kleinstmögliche natürliche Zahl, die als Wert erhalten werden kann (was ja offensichtlich falsch ist).

Aufgabe 6



Gegeben ist ein Quadrat $ABCD$. Ein Punkt S bewegt sich auf der Quadratseite $\overline{CD}$.
Auf welcher Bahn bewegt sich dabei der Umkreismittelpunkt des Dreiecks ABS? Begründe deine Antwort.

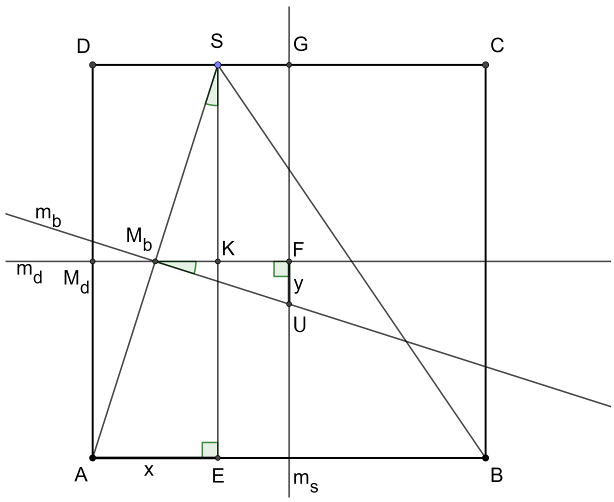
Lösung:



Der Umkreismittelpunkt U bewegt sich auf der Mittelsenkrechten der Strecke $\overline{AB}$ zwischen den Punkten F und H (siehe Skizze). Hier ist F das Symmetriezentrum des Quadrats $ABCD$ und H liegt unterhalb von F, wobei für die Streckenlänge $\overline{FH} = \frac{1}{8}\overline{AB}$ gilt.

1.Beweis (mit Ähnlichkeit von Dreiecken):

Bekanntlich ist der Umkreismittelpunkt U eines Dreiecks der Schnittpunkt der drei Mittelsenkrechten der Seiten des Dreiecks. Folglich liegt der Umkreismittelpunkt U des Dreiecks ABS auf der Mittelsenkrechten m_s der Dreieckseite $\overline{AB}$.
Er fällt mit dem Schnittpunkt F der Mittelsenkrechten m_s und m_d der Quadratseiten $\overline{AB}$ bzw. $\overline{DA}$ zusammen, falls $S = C$ oder $S = D$ ist.
Wir untersuchen nun, wohin U sich bewegt, wenn S von D aus zum Mittelpunkt G der Seite $\overline{CD}$ gleitet.



Aus Gründen der Achsensymmetrie bzgl. m_s erhält man für den Fall, dass S von C aus nach G gleitet, die gleichen Ergebnisse. Daher nehmen wir im Weiteren an, dass S auf der Strecke $\overline{GD}$ liegt.
Wir bezeichnen den Fußpunkt des Lotes von S auf AB mit E und im Rechteck $AESD$ die Mittelpunkte der Seiten $\overline{DA}$ und $\overline{SE}$ und der Diagonale $\overline{AS}$ mit M_d, K bzw. M_b. Weiterhin sei die Länge von $\overline{AE}$ mit x, die Länge von $\overline{FU}$ mit y und die Seitenlänge des Quadrats mit a bezeichnet.
Da m_d Mittelsenkrechte von $\overline{DA}$ im Rechteck $AESD$ ist, liegen die Punkte M_d, M_b und K auf m_d. Insbesondere ist $|\overline{M_bM_d}| = |\overline{M_bK}| = \frac{1}{2}x$. Offensichtlich gilt ebenfalls $a = |\overline{AD}| = |\overline{ES}|$ und $|\overline{M_dF}| = \frac{1}{2}a$.
Wir zeigen, dass die Dreiecke AES und UFM_b zueinander ähnlich sind, da sie in zwei

Winkeln übereinstimmen:

- Die beiden Winkel $\angle SEA$ und $\angle UFM_b$ sind beide rechte Winkel, weil einerseits E der Lotfußpunkt von S auf AB ist und andererseits die Geraden UF und FM_b Mittelsenkrechten der Quadratseiten $\overline{AB}$ und $\overline{DA}$ sind.
- Die Winkel $\angle ASE$ und $\angle UM_bF$ sind gleich groß, denn wegen $90° = \angle UM_bS$ ist einerseits $\angle UM_bF = 90° - \angle FM_bS$. (*)
  Andererseits gilt im rechtwinkligen Dreieck M_bKS: $\quad \angle ASE + \angle FM_bS + 90° = 180°$ und daher $\angle ASE = 90° - \angle FM_bS$. (**)
  Mit (*) und (**) folgt schließlich $\angle ASE = \angle UM_bF$.

Aufgrund der Ähnlichkeit der Dreiecke AES und UFM_b folgt

$$\frac{|\overline{AE}|}{|\overline{SE}|} = \frac{|\overline{UF}|}{|\overline{M_bF}|}$$

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{|\overline{M_dF}| - |\overline{M_dM_b}|} = \frac{y}{\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}x}$$

Auflösen nach y liefert

$$y = \frac{1}{2a}x(a-x) = \frac{1}{2a}\left(-x^2 + ax\right) ,$$

was den Funktionsterm einer quadratischen Funktion darstellt. Für die Variable x gilt dabei $0 \le x \le \frac{1}{2}a$. Wegen des negativen Vorzeichens vor x^2 ist der Graph dieser quadratischen Funktion eine nach unten geöffnete Parabel. Daher wird das Maximum der Funktion am Scheitelpunkt angenommen.
Der Scheitelpunkt des Graphen der quadratischen Funktion liegt bekanntlich bei $x_S = \frac{1}{2}a$. Setzt man diesen x-Wert in den Funktionsterm ein, erhält man das Maximum der Funktion:

$$y_{max} = \frac{1}{2a}\left(-\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a\frac{a}{2}\right) = \frac{a}{8}$$

Für $S = G$ ist $x = \frac{1}{2}a$ - das Maximum wird also angenommen. In diesem Fall ist $U = H$. Für $S = D$ ist $x = 0$ und damit $y = 0$, also kann U jeden Punkt auf der Strecke $\overline{FH}$ annehmen, wenn der Punkte S von D nach G bewegt wird.

2.Beweis (mit Koordinatenrechnung):

Die Seitenlänge des Quadrates $ABCD$ sei a. Wir wählen ein kartesisches Koordinatensystem dessen Ursprung im Punkt A liegt, B auf der x-Achse und D auf der y-Achse, sodass gilt

$$A(0;0) \quad , \quad B(a;0) \quad , \quad D(0;a) \quad .$$

Der Punkt S liegt auf der Strecke $\overline{CD}$. Daher gilt für den Punkt $S(x_S;y_S)$:

$$S(x_S;a) \quad , \quad 0 \le x_S \le a \quad .$$

Wir berechnen nun die Koordinaten x_U und y_U des Umkresimittelpunktes U in Abhängigkeit von x_S.
Bekanntlich ist der Umkreismittelpunkt eines Dreiecks der Schnittpunkt der drei Mittelsenkrechten der Seiten des Dreiecks. Folglich liegt der Umkreismittelpunkt U des Dreiecks

ABS auf der Mittelsenkrechten m_s der Dreieckseite $\overline{AB}$. Also ist $x_U = \frac{1}{2}a$. Bleibt noch y_S zu berechnen.
Dazu bestimmen wir die Geradengleichung der Mittelsenkrechten der Seite $\overline{AS}$. Sie verläuft durch den Mittelpunkt M_b von $\overline{AS}$, wobei $M_b\left(\frac{1}{2}x_S; \frac{1}{2}a\right)$ gilt.
Falls $x_S \neq 0$ gilt, ist die Steigung der Gerade AS gleich $m_{AS} = \frac{y_S}{x_S} = \frac{a}{x_S}$. Dann ist die Steigung der Mittelsenkrechten gegeben durch $m = -\frac{1}{m_{AS}} = -\frac{x_S}{a}$. Falls $x_S = 0$ gilt, fällt AS mit der y-Achse zusammen. Eine Senkrechte zur y-Achse hat die Steigung 0, d.h. auch im Fall $x_S = 0$ gilt $m = -\frac{x_S}{a}$.
Nun können wir die Gleichung der Mittelsenkrechten m_b aufstellen:

$$m_b : y = mx + c = -\frac{x_S}{a}x + c,$$

wobei c aus der Bedingung $M_b \in m_b$ folgt:

$$\frac{a}{2} = -\frac{x_S}{a}\frac{1}{2}x_S + c \quad .$$

Auflösen nach c liefert $c = \frac{a}{2} + \frac{x_S^2}{2a}$. Also gilt für die Mittelsenkrechte:

$$m_b : y = -\frac{x_S}{a}x + \frac{a}{2} + \frac{x_S^2}{2a} \quad . \tag{1}$$

Der Umkreismittelpunkt U erfüllt $x_U = \frac{a}{2}$ und er liegt auf m_b. Folglich können wir mit (1) die y-Koordinate von U berechnen:

$$y_U = -\frac{x_S}{a}\frac{1}{2}a + \frac{a}{2} + \frac{x_S^2}{2a} = \frac{1}{2a}x_S^2 - \frac{1}{2}x_S + \frac{a}{2} \quad . \tag{2}$$

Offensichtlich handelt es sich hier um den Funktionsterm einer quadratischen Funktion in Abhängigkeit von x_S. Ihr Graph ist wegen des positiven Vorfaktors vor x_S^2 eine nach oben geöffnete Parabel. Ihr Scheitelpunkt hat die x-Koordinate

$$x_{min} = -\frac{1}{2}\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2a}} = \frac{a}{2}$$

und den y-Wert

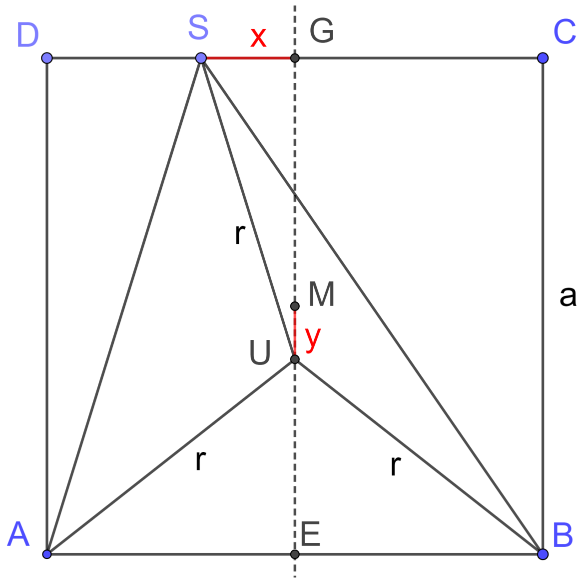
$$y_{min} = \frac{1}{2a}\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{a}{2} + \frac{a}{2} = \frac{3}{8}a \quad .$$

Es gilt weiterhin

$$m_b(0) = m_b(a) = \frac{a}{2},$$

also wandert der Umkreismittelpunkt U von $F(\frac{1}{2}a; \frac{1}{2}a)$ auf der Geraden $x = \frac{1}{2}a$ nach unten bis zum Punkt $H(\frac{1}{2}a; \frac{3}{8}a)$ und dann wieder zurück zu F, wenn der Punkt S von D nach C wandert.

3. Beweis:



U sei der Umkreismittelpunkt des Dreiecks $\triangle ABS$ und r sei der Radius des Umkreises des Dreiecks $\triangle ABS$. M sei der Mittelpunkt des Quadrats $ABCD$. Die Mittelpunkte der Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ sind in der Skizze die Punkte E und G. Aufgrund der Spiegelsymmetrie zur Gerade EG können wir annehmen, dass S auf der Strecke $\overline{GD}$ liegt. Des Weiteren sei $|\overline{SG}| = x$, $0 \leq x \leq \frac{a}{2}$ und $|\overline{GU}| = \frac{a}{2} + y$ (d.h. für $y > 0$ liegt U unterhalb von M, für $y < 0$ oberhalb).

Es gilt mit Satz des Pythagoras

(1) im Dreieck $\triangle SGU$: $x^2 + \left(\frac{a}{2} + y\right)^2 = r^2$,

(2) im Dreieck $\triangle EBU$: $\left(\frac{a}{2} - y\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = r^2$.

Setzen wir (1) und (2) gleich und formen um, dann erhalten wir

$$
\begin{aligned}
x^2 + \left(\frac{a}{2} + y\right)^2 &= \left(\frac{a}{2} - y\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \\
x^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 + ay + y^2 &= \left(\frac{a}{2}\right)^2 - ay + y^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \\
y &= \frac{a}{8} - \frac{1}{2a}x^2 \qquad (3)
\end{aligned}
$$

Für $x = 0$ ist der Term für y maximal und hat den Wert $\frac{a}{8}$, für $x = \frac{a}{2}$ ist er minimal und hat den Wert 0. Folglich nimmt y alle Werte zwischen 0 und $\frac{a}{8}$ an.

Bemerkung:

Die Frage, auf welcher Bahn sich ein Punkt bewegt, erfordert in der Regel die Beschreibung der Menge der Punkte, die er erreichen kann, den Nachweis, dass höchstens diese Punkte, also keine anderen, erreicht werden können und den Nachweis, dass jeder Punkt dieser Menge auch wirklich erreicht wird. Das letzte Argument, also konkret der Beweis der Tatsache, dass jeder Punkt der Strecke $\overline{FH}$ tatsächlich auch Umkreismittelpunkt eines Dreiecks für ein mögliches S ist, ist für eine vollständige Lösung zwar eigentlich nötig, wird im Rahmen des Landeswettbewerbs aber nicht explizit in Schülerlösungen verlangt.