38. Landeswettbewerb Mathematik Baden-Württemberg

Lösungsbeispiele für die

Aufgaben der 2. Runde 2024/2025

2024

Aufgabe 1

Eine Klasse mit 22 Schülern trägt ein besonderes Fußballturnier mit fünf Spielen aus. Dabei wird vor jedem Spiel die Klasse neu in zwei Mannschaften geteilt, sodass immer 11 gegen 11 gespielt wird. Jeder Schüler erhält bei einem Sieg seiner Mannschaft drei Punkte, bei einem Unentschieden einen Punkt und bei einer Niederlage null Punkte. Am Ende des Turniers hat jeder Schüler mit jedem anderen Schüler mindestens einmal gemeinsam in einer Mannschaft gespielt. Zeige, dass es fünf Schüler gibt, die dieselbe Punktsumme erzielt haben.

1. Beweis (mit Betrachtung der Siege und Schubfachprinzip):

Jeder Schüler hat entweder 0, 1, 2, 3, 4 oder 5 Siege erzielt. Wenn es einen Schüler S gibt, der 5 Siege erzielt hat, also alle seine Spiele gewonnen hat, dann hat jeder andere Schüler auch mindestens einmal gewonnen, nämlich zumindest eines derjenigen Spiele, die er mit S zusammen in einer Mannschaft gespielt hat, von denen es nach Voraussetzung mindestens eines gibt. Dann gibt es also keinen Schüler, der 0 Siege erzielt hat. Also gilt: Es kommen höchstens fünf Gesamtzahlen an Siegen unter den Schülern vor: 1, 2, 3, 4 und entweder 0 oder 5.
Nach Schubfachprinzip gibt es daher unter den 22 Schülern mindestens $22 : 5 > 4$, also mindestens fünf, die die gleiche Zahl an Siegen errungen haben. Diese (mindestens) Fünf haben aber auch dieselbe Zahl an Unentschieden erreicht, denn jedes Unentschieden ist gleichzeitig Unentschieden für alle Schüler, und damit haben diese (mindestens) fünf Schüler dieselbe Zahl an Siegen, Unentschieden und auch Niederlagen. Sie haben deswegen also auch dieselbe Punktsumme erzielt.

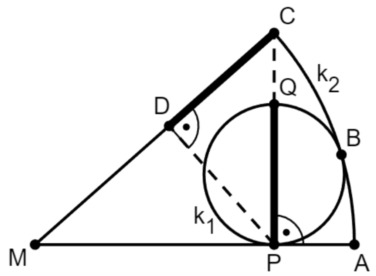
2. Beweis (mit Betrachtung der Punktsummen und Schubfachprinzip):

Fall 1: Angenommen, unter den fünf Spielen gab es kein Unentschieden. Dann hat jeder Spieler in jedem Spiel entweder 0 oder 3 Punkte erhalten. Bei fünf Spielen sind also genau die Punktzahlen 0, 3, 6, 9, 12 und 15 möglich. Angenommen, es gäbe nun einen Spieler A, der 0 Punkte erzielt hat und einen Spieler B, der 15 Punkte erzielt hat. Nach Voraussetzung gibt es mindestens ein Spiel, in dem A und B zusammen in einer Mannschaft gespielt haben. Weil A 0 Punkte hat, müssen A und B dieses Spiel verloren haben. Das steht aber im Widerspruch zur Tatsache, dass B 15 Punkte hat, also alle Spiele gewonnen haben muss.
Also kann nur höchstens eine der Gesamtpunktzahlen 0 oder 15 vorkommen.
Damit gibt es höchstens fünf mögliche Gesamtpunktzahlen: 3, 6, 9, 12 und 0 oder 15. Nach Schubfachprinzip kommt unter den 22 Schülern dann eine dieser Punktzahlen mindestens

$22 : 5 > 4$ mal vor. Also gibt es fünf Schüler mit derselben Punktzahl.
Fall 2: Angenommen, es gibt $u \geq 1$ Unentschieden unter den fünf Spielen (also $u \leq 5$). Dann gab es $5 - u$ Spiele, die keine Unentschieden waren. Aus diesen Spielen hat jeder Spieler jeweils 0 oder 3 Punkte, insgesamt also eine der Punktesummen $0, 3, \ldots, (5-u)\cdot 3$ erhalten. Das sind $5 - u + 1 \leq 5$ verschiedene Möglichkeiten. Zusammen mit den Punkten aus den u Unentschieden, bei denen jeder zusätzlich je einen Punkt erhält, ergeben sich die höchstens 5 verschiedenen möglichen Gesamtpunktsummen $u, 3+u, \ldots, (5-u)\cdot 3 + u$. Nach Schubfachprinzip kommt unter den 22 Schülern dann wieder eine dieser Punktzahlen mindestens $22 : 5 > 4$ mal vor. Also gibt es auch hier fünf Schüler mit derselben Punktzahl. Damit ist alles gezeigt.

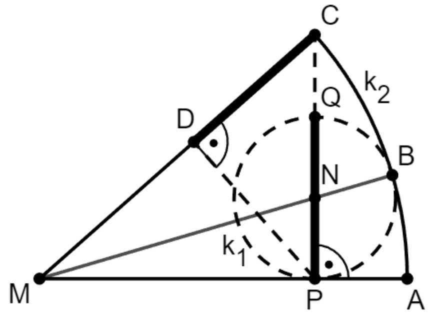
Aufgabe 2

Wie in der Abbildung berührt der Kreis k_1 den Kreisbogen k_2 und dessen Radius $\overline{MA}$ in den Punkten B bzw. P. Das Lot auf MA durch P schneidet k_1 in Q und k_2 in C. Der Punkt D ist der Fußpunkt des Lotes von P auf $\overline{MC}$. Zeige: $|\overline{CD}| = |\overline{PQ}|$.



1. Beweis (mit Satz des Pythagoras und Kathetensatz):

Mit N wird der Mittelpunkt von k_1 bezeichnet. Weil sich k_1 und k_2 in B berühren, liegt N auf MB und weil k_1 den Radius $\overline{MA}$ in P berührt, liegt N auf PC. Außerdem ist dann $\overline{PQ}$ Durchmesser von k_1. Im rechtwinkligen Dreieck MPN folgt dann mit Satz des Pythagoras:



$$|\overline{NP}|^2 = |\overline{MN}|^2 - |\overline{MP}|^2 = \left(|\overline{MB}| - |\overline{NB}|\right)^2 - |\overline{MP}|^2$$
$$= \left(|\overline{MC}| - |\overline{NP}|\right)^2 - |\overline{MP}|^2.$$

Multipliziert man hier die Klammer aus und nutzt den Satz des Pythagoras im rechtwinkligen Dreieck MPC, so ergibt sich weiter:

$$\begin{aligned}|\overline{NP}|^2 &= \left(|\overline{MC}| - |\overline{NP}|\right)^2 - |\overline{MP}|^2\\ &= |\overline{MC}|^2 - 2\cdot|\overline{MC}|\cdot|\overline{NP}| + |\overline{NP}|^2 - |\overline{MP}|^2\\ \iff\ & 2|\overline{NP}|\cdot|\overline{MC}| = |\overline{MC}|^2 - |\overline{MP}|^2 = |\overline{PC}|^2. \quad (*)\end{aligned}$$

Der Kathetensatz im rechtwinkligen Dreieck MPC liefert aber

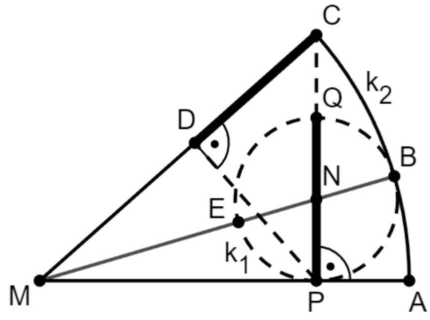
$$|\overline{DC}|\cdot|\overline{MC}| = |\overline{PC}|^2.$$

Vergleicht man dies mit (*), so ergibt sich (weil $|\overline{MC}| \neq 0$):

$$|\overline{DC}|\cdot|\overline{MC}| = 2|\overline{NP}|\cdot|\overline{MC}| \iff |\overline{DC}| = 2|\overline{NP}| = |\overline{PQ}|.$$

Das war zu zeigen.

2. Beweis (mit Sekanten-Tangentensatz und Kathetensatz):



Wie im 1. Beweis begründet man, dass $|\overline{PQ}|$ Durchmesser von k_1 ist. Zusätzlich sei E der zweite Schnittpunkt von MB mit k_1. Weil N auf MB liegt, ist $|\overline{EB}|$ dann auch Durchmesser von k_1. Es folgt daher aus dem Sekanten-Tangentensatz am Kreis k_1:

$$|\overline{MP}|^2 = |\overline{ME}| \cdot |\overline{MB}| \quad (1).$$

Der Kathetensatz im Dreieck MPC zeigt:

$$|\overline{MP}|^2 = |\overline{MD}| \cdot |\overline{MC}| \quad (2).$$

Weil $|\overline{MB}| = |\overline{MC}|$ ist, folgt aus (1) und (2), dass

$$|\overline{MD}| = |\overline{ME}| \iff |\overline{MC}| - |\overline{CD}| = |\overline{MB}| - |\overline{EB}| \iff |\overline{CD}| = |\overline{EB}| = |\overline{PQ}|.$$

Das war zu zeigen.

Aufgabe 3

Zwei positive ganze Zahlen a und b nennen wir periodische Partner*, wenn die beiden Brüche $\frac{1}{a}$ und $\frac{1}{b}$ eine reinperiodische Dezimalbruchdarstellung haben und die Ziffernfolge der Periode bei dem einen Bruch der Ziffernfolge der anderen Zahl entspricht (evtl. mit führenden Nullen), und umgekehrt. So sind zum Beispiel die beiden zweistelligen Zahlen* 27 *und* 37 *periodische Partner, weil $\frac{1}{27} = 0,\overline{037}$ und $\frac{1}{37} = 0,\overline{027}$. Bestimme alle Paare von dreistelligen Zahlen, die periodische Partner sind.*

Lösung:

$(271; 369)$ und $(123; 813)$ und die beiden hieraus durch Vertauschen der beiden Zahlen entstehenden Paare sind die einzigen Paare dreistelliger Zahlen, die periodische Partner sind.

Beweis:

Angenommen, zwei positive ganze Zahlen a und b sind dreistellig und periodische Partner. Dann gilt $\frac{1}{a} = 0,\overline{0\ldots 0b_1b_2b_3}$, wobei b_1, b_2 und b_3 in dieser Reihenfolge die Ziffern der Dezimaldarstellung von b sind. Die Periode von $\frac{1}{a}$ hat dann eine Länge $n \geq 3$ und es gilt:

$$10^n \cdot \frac{1}{a} = b_1b_2b_3,\overline{0\ldots 0b_1b_2b_3} = b + 0,\overline{0\ldots 0b_1b_2b_3} = b + \frac{1}{a}.$$

Daraus folgt dann aber $(10^n - 1) \cdot \frac{1}{a} = b \iff ab = 10^n - 1$. Weil $100 \leq a \leq 999$ und $100 \leq b \leq 999$ ist, ist einerseits $ab \geq 100 \cdot 100 = 10^4 > 10^4 - 1$ und andererseits $ab \leq 999 \cdot 999 < 999 \cdot 1000 = 999000 < 10^6 - 1$. Hieraus folgt, dass $n = 5$ sein muss.
Das Produkt ab zwei dreistelliger Zahlen ergibt demnach $10^5 - 1$ und die Primfaktorzerlegung dieser Zahl ist $10^5 - 1 = 99999 = 3 \cdot 3 \cdot 41 \cdot 271$. Eine der beiden Zahlen a oder b

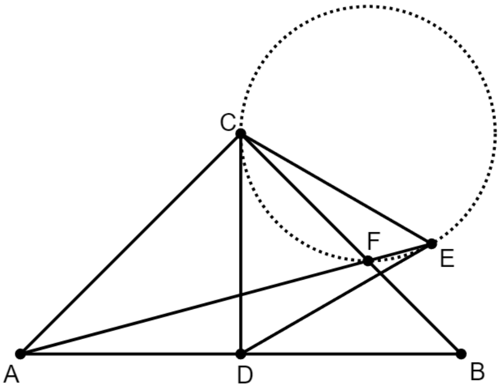
muss also den Primfaktor 271 enthalten. Das Produkt der übrigen Primfaktoren dieser dreistelligen Zahlen muss dann kleiner sein als $1000 : 271 < 4$; es kann also höchstens noch ein Primfaktor 3 hinzukommen. Es ergeben sich für die Zahl, die den Primfaktor 271 enthält, die beiden Möglichkeiten 271 und $271 \cdot 3 = 813$. Für die andere Zahl erhält man dann jeweils $99999 : 271 = 369$ bzw. $99999 : 813 = 123$. Das ergibt die oben genannten Paare als einzig mögliche Lösungen. Die Probe erfolgt direkt über die schriftliche Division:

$$\frac{1}{271} = 1 : 271 = 0,\overline{00369} \quad \text{und} \quad \frac{1}{369} = 1 : 369 = 0,\overline{00271}$$

$$\frac{1}{123} = 1 : 123 = 0,\overline{00813} \quad \text{und} \quad \frac{1}{813} = 1 : 813 = 0,\overline{00123}.$$

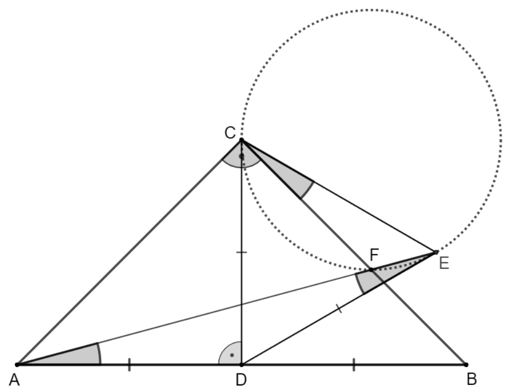
Aufgabe 4

Im gleichschenklig-rechtwinkligen Dreieck ABC ist D der Mittelpunkt der Basis $\overline{AB}$. Der Punkt E bildet zusammen mit den Punkten C und D wie in nebenstehender Abbildung ein gleichseitiges Dreieck. F ist der Schnittpunkt der Geraden AE mit der Seite $\overline{BC}$ Zeige, dass die Geraden DC und DE Tangenten an den Umkreis des Dreiecks CFE sind.



Vorbemerkung:

In einem gleichschenkligen Dreieck stimmt bekannter Maßen die Seitenhalbierende der Basis mit der entsprechenden Höhe und der Winkelhalbierenden überein. Im rechtwinklig-gleichschenkligen Dreieck ABC, in dem D der Mittelpunkt der Basis $\overline{AB}$ ist, gilt daher $\measuredangle CDA = 90°$ und $\measuredangle ACD = 45° = \measuredangle DCB$. Weiter ergibt sich im Dreieck ABC mit der Innenwinkelsumme und dem Basiswinkelsatz: $\measuredangle BAC = 45° = \measuredangle CBA$.



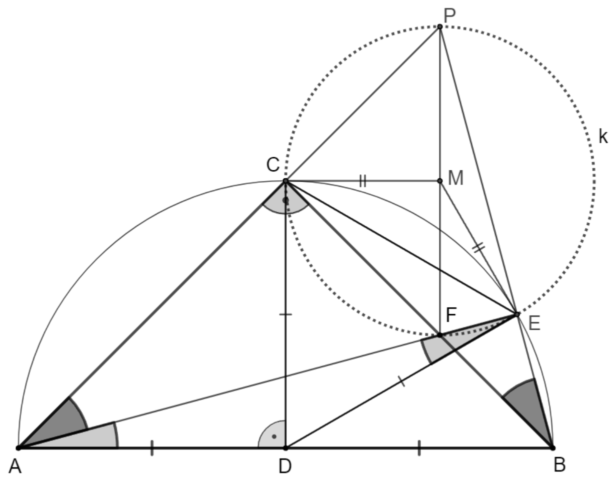
Im Teildreieck CAD folgt dann mit $\measuredangle DAC = \measuredangle BAC = 45° = \measuredangle ACD$ und der Umkehrung des Basiswinkelsatzes: $|\overline{DC}| = |\overline{DA}|$. Da das Dreieck CDE gleichseitig ist, ergibt sich $|\overline{DA}| = |\overline{DC}| = |\overline{DE}|$ – d.h. das Dreieck EAD ist gleichschenklig mit Basis $|\overline{AE}|$. In diesem Dreieck ergibt sich dann $\measuredangle EDA = \measuredangle EDC + \measuredangle CDA = 60° + 90° = 150°$ (die Innenwinkel eines gleichseitigen Dreiecks betragen 60°) – und mit der Innenwinkelsumme und dem Basiswinkelsatz folgt weiter: $\measuredangle AED = \measuredangle DAE = \frac{180°-150°}{2} = 15°$.

1. Beweis:

P bezeichne den zweiten Schnittpunkt der Geraden AC mit dem Umkreis k des Dreiecks CFE.

Dann gilt: Die Punkte P, E und B liegen auf einer Geraden.

Begründung: Der Winkel $\measuredangle FCP$ beträgt als Nebenwinkel des 90°-Winkels $\measuredangle ACB$ ebenfalls 90°. Die Strecke $\overline{PF}$ ist daher gemäß der Umkehrung des Satzes des Thales ein Durchmesser des Kreises k, dessen Mittelpunkt M dann auch Mittelpunkt dieses Durchmessers ist. Mit dem Satz des Thales folgt $\measuredangle PEF = 90°$.



Nach den Vorüberlegungen gilt $\overline{DE} = \overline{DA} = \overline{DB}$. Der Punkt E liegt also auf dem Thaleskreis über dem Durchmesser $\overline{AB}$, weshalb der Winkel $\measuredangle FEB = \measuredangle AEB$ ebenfalls 90° beträgt. Somit gilt $\measuredangle PEF + \measuredangle FEB = 90° + 90° = 180°$ – d.h. P, E und B liegen auf einer Geraden.
Im Dreieck AFC gilt mit den Vorüberlegungen $\measuredangle FAC = \measuredangle BAC - \measuredangle BAF = 45° - 15° = 30°$. Und mithilfe der Innenwinkelsumme im Dreieck ABE ergibt sich: $\measuredangle PBC = \measuredangle EBF = 180° - \measuredangle BAE - \measuredangle AEB - \measuredangle FBA = 180° - 15° - 90° - 45° = 30°$. Weiter gilt $\measuredangle ACF = 90° = \measuredangle BCP$. Die beiden Dreiecke AFC und BPC stimmen nach Voraussetzung in den Längen der Seiten $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ sowie den beiden anliegenden Innenwinkeln überein; nach Kongruenzsatz wsw sind sie also kongruent.

In diesen kongruenten Dreiecken liegen die Seiten $\overline{CF}$ und $\overline{CP}$ dem gleichen Winkel (30°) gegenüber und sind somit gleich lang. Das Dreieck FPC ist daher rechtwinklig-gleichschenklig – und analog zu den Vorüberlegungen gilt dann $\measuredangle FCM = 45°$. (Die Mittellinie $\overline{CM}$ ist hier auch Winkelhalbierende.) Somit ergibt sich $\measuredangle DCM = \measuredangle DCF + \measuredangle FCM = 45° + 45° = 90°$ – d.h. die Gerade DC steht senkrecht auf dem Kreisradius $\overline{MC}$ und ist daher eine Tangente an den Kreis k.
Wegen $|\overline{DC}| = |\overline{DE}|$ und $|\overline{MC}| = |\overline{ME}|$ (Kreisradien) handelt es sich beim Viereck $DEMC$ um ein Drachenviereck – bei dem die gegenüberliegenden Winkel $\measuredangle DCM$ und $\measuredangle MED$ gleich groß sind. Somit ergibt sich $\measuredangle MED = \measuredangle DCM = 90°$ – d.h. DE steht senkrecht auf dem Kreisradius $\overline{ME}$ und ist ebenfalls Tangente an den Umkreis k des Dreiecks CFE. Damit ist alles gezeigt.

Variante (mit Sätzen über Winkel am Kreis):

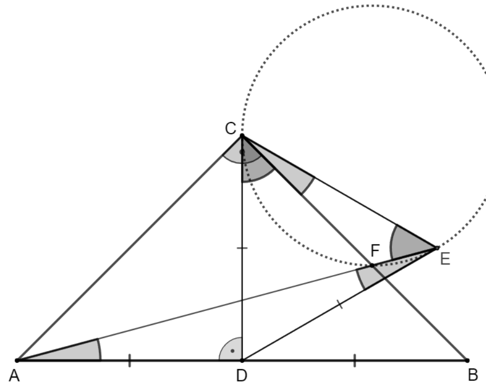
Wie zuvor zeigt man, dass die Punkte P, E und B auf einer Geraden liegen. Der Satz von der Innenwinkelsumme im Dreieck BPC ergibt dann $\measuredangle CPB = 180° - \measuredangle BCP - \measuredangle PBC = 180° - 90° - 30° = 60°$. Der Mittelpunktswinkelsatz zur Kreissehne $\overline{CE}$ im Kreis k zeigt dann: $\measuredangle CME = 2 \cdot \measuredangle CPE = 2 \cdot 60° = 120°$.

Nun ergibt sich mit der Innenwinkelsumme im Drachenviereck $DEMC$:
$\measuredangle MED = \measuredangle DCM = \frac{360° - \measuredangle EDC - \measuredangle CME}{2} = \frac{360° - 60° - 120°}{2} = 90°$. D.h. $DC \perp \overline{MC}$ und $DE \perp \overline{ME}$ und bei den Geraden DC und DE handelt es sich um Tangenten an den Kreis k.

Alternative:
Die Geraden DC und DE schließen mit der Kreissehne $\overline{CE}$ jeweils einen 60°-Winkel ein: $\measuredangle DCE = \measuredangle CED = 60°$. Da der Umfangswinkel $\measuredangle CPE$ über der Kreissehne $\overline{CE}$ wie gezeigt ebenfalls 60° beträgt, gilt $\measuredangle DCE = \measuredangle CPE = \measuredangle CED$. Mit der Umkehrung des Sehnentangentenwinkelsatz folgt, dass DC und DE Tangenten an den Kreis (CFE) sind.

2. Beweis (mit dem Sehnentangentenwinkelsatz):

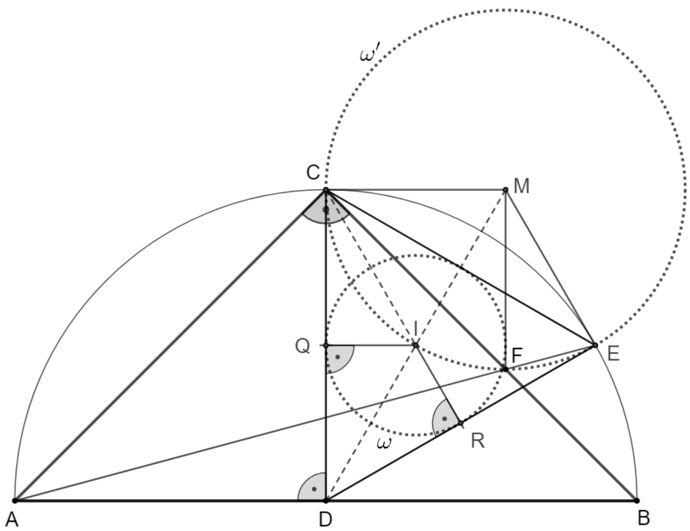
Im Dreieck AEC gilt mit den Vorüberlegungen $\measuredangle EAC = \measuredangle BAC - \measuredangle BAF = 45° - 15° = 30°$ – und weiter mit der Innenwinkelsumme $\measuredangle CEA = 180° - \measuredangle EAC - \measuredangle ACE = 180° - 30° - (45° + 60°) = 45°$. Zusammen mit $\measuredangle DCF = \measuredangle DCB = 45°$ ist also $\measuredangle DCF = 45° = \measuredangle CEF$ erfüllt – d.h. der von der Gerade DC mit der Kreissehne $\overline{CF}$ eingeschlossene Winkel stimmt mit dem Umfangswinkel $\measuredangle CEF$ über $\overline{CF}$ überein. Gemäß der Umkehrung des Sehnentangentenwinkelsatzes handelt es sich bei DC somit um eine Tangente an den Kreis k.



Wegen $\measuredangle FCE = \measuredangle DCE - \measuredangle DCF = 60° - 45° = 15°$ gilt zusammen mit den Vorüberlegungen auch $\measuredangle FED = \measuredangle AED = 15° = \measuredangle FCE$. Nun ergibt die Umkehrung des Sehnentangentenwinkelsatzes zur Kreissehne $\overline{FE}$, dass auch die Gerade DE Tangente an den Kreis k ist.

3. Beweis (mit zentrischer Streckung):

Q und R seien die Berührpunkte des Inkreises ω des gleichseitigen Dreiecks CDE mit den Seiten $\overline{DC}$ und $\overline{DE}$. Im gleichseitigen Dreieck sind diese Berührpunkte aus Symmetriegründen auch die Mittelpunkte der Dreiecksseiten. Nun überführt eine zentrische Streckung mit Zentrum D und Streckfaktor 2 die Berührpunkte Q und R in die Punkte C und D und den Inkreis ω in einen Kreis ω', dessen Mittelpunkt M auf der Halbgeraden $[DI$ liegt und der die Halbgeraden $[DQ$ und $[DR$ in den Punkten C und D berührt.

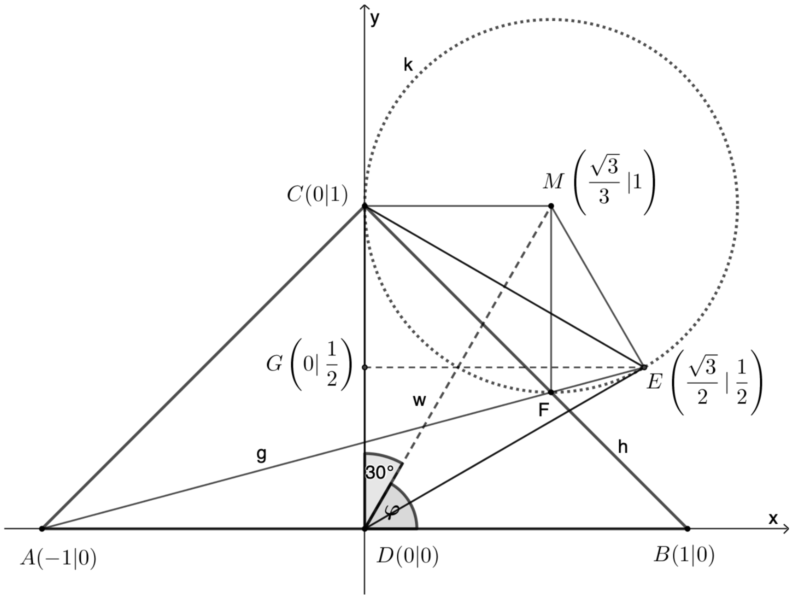


Mit $\measuredangle CME = 360° - (60° + 90° + 90°) = 120°$ (Innenwinkelsumme im Viereck $DEMC$) erhält man für dem überstumpfen Winkel $\measuredangle EMC$: $\measuredangle EMC = 360° - \measuredangle CME = 240°$. Zusammen mit den Vorüberlegungen, dem Scheitelwinkelsatz und dem Satz über die Innenwinkelsumme im Dreieck ABF ergibt sich: $\measuredangle EFC = \measuredangle AFB = 180° - \measuredangle BAF - \measuredangle FBA = 180° - 15° - 45° = 120°$. Für die Kreissehne $\overline{CE}$ ist der Mittelpunktswinkel $\measuredangle EMC$ also doppelt so groß wie der Umfangswinkel $\measuredangle EFC$: $\measuredangle EMC = 240° = 2 \cdot 120° = 2 \cdot \measuredangle EFC$. Gemäß der Umkehrung des Mittelpunktwinkelsatzes liegt der Punkt F daher auf dem Kreis ω'. Bei ω' handelt es sich also um den Umkreis des Dreiecks CFE, und wie gezeigt sind die Geraden DC und DE Tangenten an diesen Kreis.

3. Beweis (mit Koordinaten):

Mit den Vorüberlegungen sind die Dreiecke CAD und BCD rechtwinklig-gleichschenklig mit $|\overline{AD}| = |\overline{DC}| = |\overline{DB}|$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann $|\overline{AD}|$ als eine Längeneinheit definiert werden – d.h. $|\overline{AD}| = |\overline{DC}| = |\overline{DB}| = 1$.

Im Folgenden wird ein kartesisches Koordinatensystem verwendet, dessen Ursprung im Punkt D liegt und in dem die Punkte B und C die Koordinaten $B(1|0)$ und $C(0|1)$ besitzen.



G sei der Mittelpunkt der Strecke $\overline{CD}$. Da im gleichseitigen Dreieck CDE die Seitenhalbierende $\overline{EG}$ bekannter Maßen mit der Höhe übereinstimmt, folgt mit dem Satz des Pythagoras im rechtwinkligen Dreieck DEG:

$$\overline{EG}^2 = \overline{DE}^2 - \overline{DG}^2 \Rightarrow \overline{EG} = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Somit besitzt der Punkt E die Koordinaten $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}|\frac{1}{2}\right)$ und die Gerade $g = AE$ durch die Punkte $A(-1|0)$ und $E\left(\frac{\sqrt{3}}{2}|\frac{1}{2}\right)$ hat die Steigung

$$m_g = \frac{y_E - y_A}{x_E - x_A} = \frac{\frac{1}{2} - 0}{\frac{\sqrt{3}}{2} - (-1)} = \frac{1}{2 + \sqrt{3}} = \frac{2 - \sqrt{3}}{2^2 - \sqrt{3}^2} = 2 - \sqrt{3}$$

Die Gleichung der Gerade $g = AE$ lautet damit

$$g: y = m_g \cdot (x - x_A) + y_A = (2 - \sqrt{3}) \cdot (x - (-1)) + 0 = (2 - \sqrt{3}) \cdot x + 2 - \sqrt{3} \quad .$$

Weiter ist F ist der Schnittpunkt der Gerade g mit der Gerade $h = CB$ durch die Punkt C und B. Mit $h: \ y = -x + 1$ ist die x-Koordinate des Punktes F somit die Lösung der Schnittgleichung

$$(2 - \sqrt{3}) \cdot x + 2 - \sqrt{3} = -x + 1 \iff x_F = \frac{\sqrt{3} - 1}{3 - \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad .$$

Mit der Geradengleichung für h ergibt sich dann $y_F = -x_F + 1 = \frac{3-\sqrt{3}}{3}$, d.h. $F\left(\frac{\sqrt{3}}{3}|\frac{3-\sqrt{3}}{3}\right)$.

Der Mittelpunkt M eines Kreises, für den die Schenkel $[DC$ und $[DE$ des Winkels $\measuredangle EDC$ Tangenten sind, die den Kreis in den Punkten C und E berühren, muss folgende Bedingungen erfüllen:

1) MC steht senkrecht auf der Gerade DC – d.h. auf der y-Achse

2) M liegt auf der Winkelhalbierenden w des Winkels $\measuredangle EDC$

Für 1) muss M auf der Geraden mit der Gleichung $y = 1$ liegen.
Wegen $\measuredangle EDC = 60°$ gilt für den Steigungswinkel φ der Winkelhalbierenden w des Winkels $\measuredangle EDC$: $\varphi = 90° - \frac{1}{2} \cdot 60° = 60°$. Die Steigung m_w der Winkelhalbierenden w beträgt damit $m_w = \tan 60° = \sqrt{3}$. Weil w Ursprungsgerade ist, ergibt sich $w : y = \sqrt{3} \cdot x$. Die x-Koordinate des Kreismittelpunktes M ist nun die Lösung der Schnittgleichung

$$\sqrt{3} \cdot x = 1 \iff x_M = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad .$$

Der Kreis k mit Mittelpunkt $M\left(\frac{\sqrt{3}}{3}|1\right)$ und dem Radius $r_k = |\overline{MC}| = \frac{\sqrt{3}}{3}$ berührt somit den Schenkel $[DC$ im Punkt C. Da die Eckpunkte C und E des gleichseitigen Dreiecks CDE symmetrisch bezüglich der Winkelhalbierenden w liegen, berührt der der Kreis k dann weiter den Schenkel $[DE$ im Punkt E.

Neben D und E liegt auch der Punkt F auf dem Kreis k, denn

$$|\overline{MF}| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{3-\sqrt{3}}{3} - 1\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{3} = r_k \Rightarrow F \in k \quad .$$

Beim Kreis k handelt es sich also tatsächlich um den Umkreis des Dreiecks CFE – und die Geraden DC und DE verlaufen wie gezeigt tangential an diesen Umkreis k.