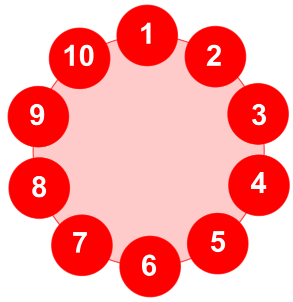
39. Landeswettbewerb Mathematik
Baden-Württemberg

Lösungsbeispiele für die
Aufgaben der 1. Runde 2025/2026

Aufgabe 1

Barbara setzt im nebenstehenden Ring einen Spielstein auf das Feld mit der Zahl 1*. Nun zieht sie den Stein im Uhrzeigersinn. Dabei gibt die Zahl des Feldes, auf dem der Stein liegt, an, um wie viele Felder sie ihn im nächsten Zug vorrückt.*
Bestimme, auf welchem Feld der Stein nach 2026 *Zügen liegt.*



Lösung:

Nach 2026 Zügen steht der Spielstein auf dem Feld mit der Zahl 4.

1. Beweis :

Notieren wir in einer Tabelle die Position des Spielsteins nach jedem der ersten 10 Züge:

Zug Nummer	Start	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Position	1	2	4	8	6	2	4	8	6	2	4

Es fällt auf, dass sich die Position des Spielsteins nach dem ersten Zug alle 4 Züge periodisch wiederholt. Das bleibt auch im Weiteren so, denn das Feld auf das man den Spielstein rückt, hängt nur von der Position unmittelbar vor dem Zug ab:

- Steht der Spielstein auf Feld 2, dann steht er nach dem Zug 2 Felder weiter, also auf Feld 4.
- Steht der Spielstein auf Feld 4, dann steht er nach dem Zug 4 Felder weiter, also auf Feld 8.
- Steht der Spielstein auf Feld 8, dann steht er nach dem Zug 8 Felder weiter, also auf Feld 6.
- Steht der Spielstein auf Feld 6, dann steht er nach dem Zug 6 Felder weiter, also auf Feld 2 und die Positionen wiederholen sich.

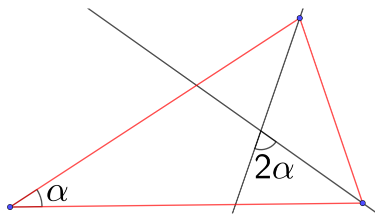
Nun ist $2026 = 2024 + 2 = 1 + 4 \cdot 506 + 1$, d.h. der Spielstein ist nach dem ersten Zug auf Position 2 gelandet, dann hat er 506 mal die Abfolge 4–8–6–2 durchlaufen und steht nach dem 2025-sten Zug wieder auf Position 2. Im 2026-sten Zug wird der Spielstein schließlich auf Position 4 gesetzt.

Variante :

De Zahl 2026 lässt bei Division durch 4 den Rest 2, denn $2026 = 4 \cdot 506 + 2$. Da sich die Positionen des Spielsteins nach dem 1. Zug periodisch mit Periode 4 wiederholen, steht der Spielstein nach dem 2026-sten Zug auf dem gleichen Feld wie nach dem 2-ten Zug, d.h. auf dem Feld mit der Nummer 4.

Aufgabe 2

Die Abbildung zeigt ein Dreieck mit zwei seiner Winkelhalbierenden. Bestimme die Größe von α.

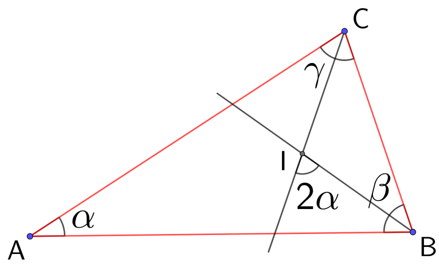


Lösung:

Der Winkel α hat die Größe 36°.

1. Beweis (mit Winkeljagd im Dreieck BCI):

Wir bezeichnen die Punkte und Winkel wie in nebenstehender Skizze: die Eckpunkte des Dreiecks bezeichnen wir mit A, B und C und I ist der Schnittpunkt der beiden Winkelhalbierenden, α, β und γ sind die Innenwinkel des Dreiecks ABC.



Wir betrachten das Dreieck BCI. Da BI und CI Winkelhalbierende sind, gilt

$$\angle CBI = \beta/2, \qquad \angle ICB = \gamma/2.$$

Der Winkel $\angle BIC$ ist Nebenwinkel von 2α, d.h.

$$\angle BIC = 180° - 2\alpha.$$

Die Innenwinkelsumme im Dreieck BCI beträgt 180°, daher folgt

$$180° = \angle CBI + \angle ICB + \angle BIC = \beta/2 + \gamma/2 + 180° - 2\alpha.$$

Nach Umformung ergibt sich

$$2\alpha = \beta/2 + \gamma/2. \tag{1}$$

Im Dreieck ist die Summe der Innenwinkel gleich 180°, daher gilt für die Summe der halben Winkel $\alpha/2 + \beta/2 + \gamma/2 = 90°$. Mit (1) folgt dann $2\alpha = 90° - \alpha/2$ bzw.

$$\frac{5}{2}\alpha = 90°\,.$$

Division durch $\frac{5}{2}$ liefert schließlich $\alpha = 36°$.

Variante :

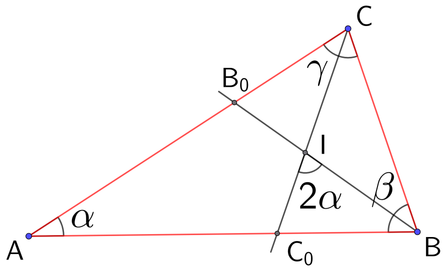
Zur Herleitung der Gleichung (1) benutzen wir den Außenwinkelsatz im Dreieck BCI. Nach Außenwinkelsatz ist ein Außenwinkel eines Dreiecks gleich der Summe der beiden nichtanliegenden Innenwinkel.
Der Winkel 2α ist Außenwinkel des Dreiecks BCI im Punkt I und daher folgt

$$2\alpha = \angle CBI + \angle ICB = \beta/2 + \gamma/2\,.$$

Die weiteren Überlegungen sind dieselben wie im Beweis 1.

2. Beweis (mit Winkeljagd im Viereck AC_0IB_0):

Wie in Beweis 1. bezeichnen wir die Eckpunkte des Dreiecks mit A, B und C, mit I den Schnittpunkt der beiden Winkelhalbierenden, mit B_0 und C_0 die Schnittpunkte von BI mit AC bzw. von CI mit AB und mit α, β und γ die Innenwinkel des Dreiecks ABC.
Der Winkel $\angle B_0IC_0$ ist Nebenwinkel von 2α und daher gilt $\angle B_0IC_0 = 180° - 2\alpha$.



Wir betrachten die Dreiecke AC_0C und ABB_0. Da BB_0 und CC_0 Winkelhalbierende sind, gilt

$$\angle B_0BA = \beta/2, \qquad \angle ACC_0 = \gamma/2.$$

Mit der Innenwinkelsumme von 180° folgt

- in Dreieck AC_0C: $\alpha + \angle CC_0A + \gamma/2 = 180°$ bzw. $\angle IC_0A = \angle CC_0A = 180° - \alpha - \gamma/2$ und
- in Dreieck ABB_0: $\alpha + \beta/2 + \angle AB_0B = 180°$ bzw. $\angle AB_0I = \angle AB_0B = 180° - \beta/2 - \alpha$.

Die Summe der Innenwinkelsumme im Viereck AC_0IB_0 betzrägt 360°. damit erhalten wir

$$\begin{aligned} 360° &= \angle C_0AB_0 + \angle AB_0I + \angle B_0IC_0 + \angle IC_0A \\ &= \alpha + (180° - \beta/2 - \alpha) + (180° - 2\alpha) + (180° - \gamma/2 - \alpha) \\ &= 540° - 3\alpha - \beta/2 - \gamma/2. \end{aligned}$$

Umformung und Ausnutzen von $\alpha/2 + \beta/2 + \gamma/2 = 90°$ liefert $2{,}5\alpha = 90°$ und schließlich $\alpha = 36°$.

Variante (Winkeljagd im Dreieck C_0BI):

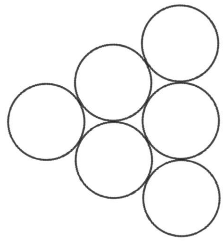
Wir betrachten die Innenwinkelsumme im Dreieck C_0BC:
$180° = \angle BC_0C + \angle C_0CB + \angle CBC_0 = \angle BC_0C + \gamma/2 + \beta$ bzw.
$\angle BC_0I = \angle BC_0C = 180° - \beta - \gamma/2$.
Die Innenwinkelsumme im Dreieck C_0BI liefert

$$180° = \angle IBC_0 + \angle BC_0I + \angle C_0IB = \beta/2 + 180° - \beta - \gamma/2 + 2\alpha$$

und nach Umformung $2\alpha = \beta/2 + \gamma/2$. Wie im 1. Beweis folgt dann $\alpha = 36°$.

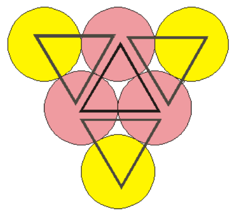
Aufgabe 3

Paula legt sechs Billardkugeln mit den Nummern $1, 2, 3, 4, 5, 6$ *wie in der Abbildung zusammen. Sie multipliziert die Kugelnummern von je drei Kugeln, die sich gegenseitig berühren. Anschließend multipliziert sie die vier dabei entstandenen Produkte miteinander.*
Zeige, dass das Ergebnis für jede mögliche Verteilung der Kugeln das Fünffache einer Quadratzahl ist.

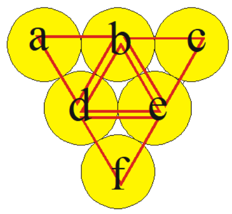


1. Beweis :

Die Produkte der Kugelnummern von je drei sich berührenden Kugeln heißen Teilprodukte. Die Abbildung zeigt, dass es vier Teilprodukte T_1, T_2, T_3, T_4 gibt. Die jeweils an den vier Teilprodukten beteiligten drei Kugeln sind durch Dreiecke miteinander verbunden. Man erkennt, dass die drei Eckkugeln (gelb) jeweils nur in einem Teilprodukt vorkommen (sie gehören zu nur einem Dreieck), während die drei mittleren Kugeln (rot) in jeweils drei Teilprodukten vorkommen. Wenn man die Teilprodukte multipliziert, so ergibt sich das Gesamtprodukt P, also $P = T_1T_2T_3T_4$.



Im Gesamtprodukt kommt die Kugelnummer der drei Eckkugeln also einmal als Faktor vor, die drei Kugelnummern der drei mittleren Kugeln kommen jeweils dreifach als Faktoren vor.
Wir schreiben, wie in der Abbildung, a, b, c, d, e, f für die sechs Kugelnummern. Jede der Variablen a, b, c, d, e, f steht also für genau eine der Zahlen $1, 2, 3, 4, 5, 6$, im allgemeinen allerdings nicht in dieser Reihenfolge. Mithilfe der eingezeichneten Dreiecke für die vier Teilprodukte $T_1, T_2, T_3 und T_4$ von drei sich berührenden Kugeln erkennen wir, dass $T_1 = abd, T_2 = bce, T_3 = def, T_4 = bde$. Somit ist das Gesamtprodukt



$$P = T_1T_2T_3T_4 = (abd)(bce)(def)(bde) = acfb^3d^3e^3.$$

Sortiert man die Faktoren mit dem Kommutativgesetz der Multiplikation um, so ergibt sich

$$P = acfb^3d^3e^3 = (abcdef)b^2d^2e^2.$$

Hierbei ist der vordere Faktor $abcdef = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$, denn jede der Variablen a, b, c, d, e, f steht für genau eine der Zahlen $1, 2, 3, 4, 5, 6$. Dividiert man das Gesamtprodukt P nun durch 5, so ergibt sich:

$$P : 5 = (abcdef)b^2d^2e^2 : 5 = (720 : 5)b^2d^2e^2 = 144b^2d^2e^2 = 12^2b^2d^2e^2 = (12bde)^2.$$

Somit ist das Gesamtprodukt geteilt durch 5 eine Quadratzahl, d.h. P ist das fünffache einer Quadratzahl – das war zu zeigen.

Variante :

Wir schreiben mit den obigen Bezeichnungen für die Kugelnummern: $x = acf$ für das Produkt der Eckkugelnummern. Dann ist $T_4 = bde = (abcdef) : (acf) = 720 : (acf) = 720 : x$ das Produkt der mittleren Kugelnummern. Insbesondere ist 720 durch x teilbar.

Es folgt:

$$P = acfb^3d^3e^3 = acf(bde)^3 = x(720:x)^3 = x?\left(\frac{720}{x}\right)^3 = x\cdot\frac{720^3}{x^3} = \frac{720^3}{x^2} = 720\cdot\left(\frac{720}{x}\right)^2.$$

Somit ist

$$P:5 = \frac{720}{5}\cdot\left(\frac{720}{x}\right)^2 = 144\cdot\left(\frac{720}{x}\right)^2 = 12^2\cdot\left(\frac{720}{x}\right)^2 = \left(\frac{12\cdot 720}{x}\right)^2$$

Das Gesamtprodukt geteilt durch 5 ist also eine Quadratzahl, d.h. P ist das fünffache einer Quadratzahl – was zu beweisen war.

2. Beweis :

Wie im ersten Beweis schreibt Paula die Variablen a, b, c, d, e, f zeilenweise in die Kugeln. Dabei landen a, c, f jeweils in einer Ecke und b, d, e jeweils auf einer Kante des Kugeldreiecks. Bei ihrer Rechnung entsteht das Produkt

$$(abd)\cdot(bde)\cdot(bce)\cdot(def) = a^1b^3c^1d^3e^3f^1$$

Eine der Variablen ist 5, die somit entweder mit der Hochzahl 1 oder 3 auftaucht. Schreibt man das Ergebnis als $5\cdot q$, so enthält die Zahl q den Primfaktor 5 entweder mit der Hochzahl 2 oder gar nicht. Nun zeigt man, dass die übrigen Primfaktoren von q auch eine gerade Hochzahl haben, somit ist das Ergebnis das Fünffache einer Quadratzahl.

Durchprobieren aller Fälle:

1. Die Zahlen 1 und 5 liegen jeweils auf einer Kante, o.B.d.A. sei $b = 1$ und $d = 5$:
   $q = 1^3\cdot 5^2\cdot(Faktor)$ laut Tabelle:

Auf Ecke: a, c, f	Auf Kante: e	Faktor $a^1c^1e^3f^1$
$2, 3, 4$	6	$2^1\cdot 3^1\cdot 6^3\cdot 4^1 = 2^6\cdot 3^4$
$2, 3, 6$	4	$2^1\cdot 3^1\cdot 4^3\cdot 6^1 = 2^8\cdot 3^2$
$2, 4, 6$	3	$2^1\cdot 4^1\cdot 3^3\cdot 6^1 = 2^4\cdot 3^4$
$3, 4, 6$	2	$3^1\cdot 4^1\cdot 2^3\cdot 6^1 = 2^6\cdot 3^2$

2 Die Zahl 1 liegt auf einer Kante, die Zahl 5 auf einer Ecke, oBdA. $b = 1, a = 5$:
   $q = 1^3\cdot 5^0\cdot(Faktor)$ Für $(Faktor)$ ergeben sich in beiden Fällen die folgenden Möglichkeiten:

Auf Ecke: c, f	Auf Kante: d, e	Faktor $c^1d^3e^3f^1$
$2, 3$	$4, 6$	$2^1\cdot 4^3\cdot 6^3\cdot 3^1 = 2^{10}\cdot 3^4$
$2, 4$	$3, 6$	$2^1\cdot 3^3\cdot 6^3\cdot 4^1 = 2^6\cdot 3^6$
$2, 6$	$3, 4$	$2^1\cdot 3^3\cdot 4^3\cdot 6^1 = 2^8\cdot 3^4$
$3, 4$	$2, 6$	$3^1\cdot 2^3\cdot 6^3\cdot 4^1 = 2^8\cdot 3^4$
$3, 6$	$2, 4$	$3^1\cdot 2^3\cdot 4^3\cdot 6^1 = 2^{10}\cdot 3^2$
$4, 6$	$2, 3$	$4^1\cdot 2^3\cdot 3^3\cdot 6^1 = 2^6\cdot 3^4$

3. Die Zahl 5 liegt auf einer Kante, die Zahl 1 auf einer Ecke, oBdA. $b = 5, a = 1$:
   $q = 1^1\cdot 5^2\cdot(Faktor)$
   Es ergeben sich für den $(Faktor)$ die gleichen Möglichkeiten wie in der Tabelle zum 2. Fall.

4. Die Zahlen 1 und 5 liegen jeweils auf einer Ecke, oBdA. $a = 1, c = 5$:
$q = 1^1 \cdot 5^0 \cdot (Faktor)$ laut Tabelle:

Auf Ecke: f	Auf Kante: b, d, e	Faktor $b^3 d^3 e^3 f^1$
2	$3, 4, 6$	$2^1 \cdot 3^3 \cdot 4^3 \cdot 6^3 = 2^{10} \cdot 3^6$
3	$2, 4, 6$	$3^1 \cdot 2^3 \cdot 4^3 \cdot 6^3 = 2^{12} \cdot 3^4$
4	$2, 3, 6$	$4^1 \cdot 2^3 \cdot 3^3 \cdot 6^3 = 2^8 \cdot 3^6$
6	$2, 3, 4$	$6^1 \cdot 2^3 \cdot 3^3 \cdot 4^3 = 2^{10} \cdot 3^4$

In allen Fällen sind die Hochzahlen der Primfaktoren von q gerade, somit handelt es sich bei $5 \cdot q$ um das Fünffache einer Quadratzahl.

3. Beweis :

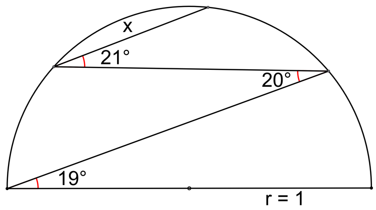
Wie im ersten Beweis schreibt Paula die Variablen a, b, c, d, e, f zeilenweise in die Kugeln. Für den Wert des Gesamtprodukts spielt die genaue Verteilung der einzelnen Kugelnummern keine Rolle, es kommt nur darauf an, welche drei Kugeln in den Ecken liegen, die restlichen drei Kugeln liegen dann in der Mitte. Das Produkt der Kugelnummern der Eckkugeln kommt im Gesamtprodukt einfach vor. Das Produkt der Kugelnummern der mittleren Kugeln kommt dreifach vor. Dieses Produkt kommt also im Gesamtprodukt in der dritten Potenz vor. Für die Auswahl von drei Kugeln aus sechs Kugeln für die drei Eckkugeln gibt es 20 Möglichkeiten (siehe Tabelle).

Eckkugelnummern	mittlere Kugelnummern	Gesamtprodukt P	$P:5$
$1, 2, 3$	$4, 5, 6$	$6 \cdot 120^3$	1440^2
$1, 2, 4$	$3, 5, 6$	$8 \cdot 90^3$	1080^2
$1, 2, 5$	$3, 4, 6$	$10 \cdot 72^3$	864^2
$1, 2, 6$	$3, 4, 5$	$12 \cdot 60^3$	720^2
$1, 3, 4$	$2, 5, 6$	$12 \cdot 60^3$	720^2
$1, 3, 5$	$2, 4, 6$	$15 \cdot 48^3$	576^2
$1, 3, 6$	$2, 4, 5$	$18 \cdot 40^3$	480^2
$1, 4, 5$	$2, 3, 6$	$20 \cdot 36^3$	432^2
$1, 4, 6$	$2, 3, 5$	$24 \cdot 30^3$	360^2
$1, 5, 6$	$2, 3, 4$	$30 \cdot 24^3$	288^2
$2, 3, 4$	$1, 5, 6$	$24 \cdot 30^3$	360^2
$2, 3, 5$	$1, 4, 6$	$30 \cdot 24^3$	288^2
$2, 3, 6$	$1, 4, 5$	$36 \cdot 20^3$	240^2
$2, 4, 5$	$1, 3, 6$	$40 \cdot 18^3$	216^2
$2, 4, 6$	$1, 3, 5$	$48 \cdot 15^3$	180^2
$2, 5, 6$	$1, 3, 4$	$60 \cdot 12^3$	144^2
$3, 4, 5$	$1, 2, 6$	$60 \cdot 12^3$	144^2
$3, 4, 6$	$1, 2, 5$	$72 \cdot 10^3$	120^2
$3, 5, 6$	$1, 2, 4$	$90 \cdot 8^3$	96^2
$4, 5, 6$	$1, 2, 3$	$120 \cdot 6^3$	72^2

Die letzte Spalte zeigt, dass das Gesamtprodukt durch 5 in allen 20 Fällen eine Quadratzahl ist. Das war zu zeigen.

Aufgabe 4

Bestimme die Länge der Sehne x.

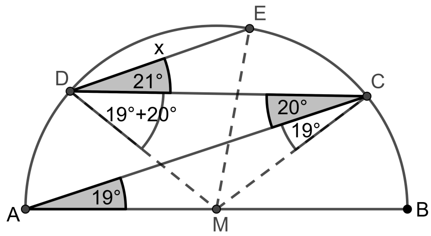


Lösung:

Die Sehne hat die Länge $x = 1$.

1. Beweis :

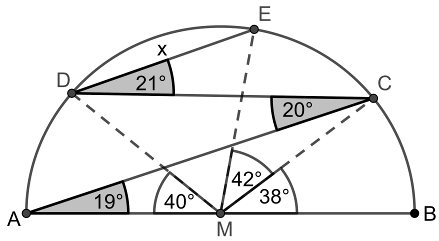
Die Punkte werden wie in der Abbildung bezeichnet. Das Dreieck AMC ist gleichschenklig, weil $\overline{AM}$ und $\overline{CM}$ beides Radien des Halbkreises sind. Deswegen ist $\angle ACM = \angle MAC = 19°$. Das Dreieck DMC ist gleichschenklig, weil $\overline{DM}$ und $\overline{CM}$ beides Radien des Halbkreises sind. Deswegen ist $\angle MDC = \angle DCM = 19° + 20°$.



Weil auch das Dreieck DME wegen der gleichlangen Radien $\overline{DM}$ und $\overline{EM}$ gleichschenklig ist und sein Basiswinkel $\angle MDE = 19° + 20° + 21° = 60°$ groß ist, handelt es sich bei Dreieck DME sogar um ein gleichseitiges Dreieck. Daher ist $x = |\overline{DM}|$, also gleich der Länge des Radius des Halbkreises. Deswegen ist $x = 1$.

2. Beweis :

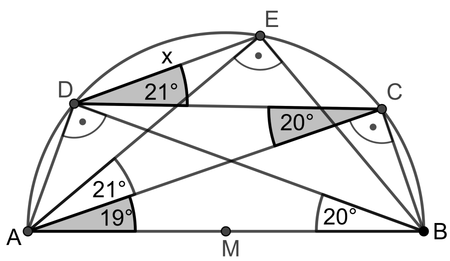
Die Punkte werden wie in der Abbildung bezeichnet. Der Winkel $\angle MBC$ ist ein Mittelpunktswinkel zum Umfangswinkel $\angle BAC = 19°$. Daher ist $\angle BMC = 2 \cdot 19° = 38°$. Genauso sind $\angle DMA$ und $\angle CME$ Mittelpunktswinkel zu den Umfangswinkeln $\angle DCA = 20°$ bzw. $\angle CDE = 21°$, weswegen $\angle DMA = 40°$ und $\angle CME = 42°$ ist.



Dann ist aber $\angle EMD = 180° - \angle BMC - \angle CME - \angle DMA = 180° - 38° - 42° - 40° = 60°$. Das gleichschenklige Dreieck DME hat daher einen Spitzenwinkel der Größe 60° und ist deswegen sogar gleichseitig. Daher ist $x = |\overline{DM}|$, also gleich der Länge des Radius des Halbkreises. Deswegen ist $x = 1$.

3. Beweis :

Mit dem Umfangswinkelsatz gilt $\angle CAE = \angle CDE = 21°$ und $\angle DBA = \angle DCA = 20°$. Außerdem sind nach Satz des Thales die Dreiecke ABC, ABE und ABD rechtwinklig mit rechtem Winkel bei C, E bzw. D.



Nach dem Satz des Ptolomäus gilt im Viereck $ABED$:

$$|\overline{DE}| \cdot |\overline{AB}| + |\overline{AD}| \cdot |\overline{BE}| = |\overline{AE}| \cdot |\overline{BD}|. \tag{1}$$

Nun ist $|\overline{AB}| = 2$ und daher im rechtwinkligen Dreieck ABD:

$$|\overline{AD}| = \sin(20°) \cdot 2\,, \quad |\overline{BD}| = \cos(20°) \cdot 2.$$

Genauso folgt im rechtwinkligen Dreieck AEB:

$$|\overline{AE}| = \cos\left(19° + 21°\right) \cdot 2 = \cos(40°) \cdot 2 \quad \text{und} \quad |\overline{BE}| = \sin(40°) \cdot 2.$$

Setzt man dies in (1) ein, so folgt:

$$x \cdot 2 + \sin(20°) \cdot 2 \cdot \sin(40°) \cdot 2 = \cos(40°) \cdot 2 \cdot \cos(20°) \cdot 2$$

Division durch 2 und Umsortieren liefert:

$$x = \left(\cos(40°) \cdot \cos(20°) - \sin(40°) \cdot \sin(20°)\right) \cdot 2.$$

Das Additionstheorem für den Kosinus ergibt schließlich:

$$x = \cos\left(40° + 20°\right) \cdot 2 = \cos(60°) \cdot 2 = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1.$$

4. Beweis (mit Kosinussatz):

Wie im 3. Beweis sieht man $|\overline{AD}| = \sin 20° \cdot |\overline{AB}|$ und $|\overline{AE}| = \cos 40° \cdot |\overline{AB}|$. Außerdem ist $\angle EAD = \angle BAD - \angle BAE = (90° - 20°) - 40° = 30°$. Der Kosinussatz liefert daher:

$$\begin{aligned} x^2 &= |\overline{AD}|^2 + |\overline{AE}|^2 - 2 \cdot |\overline{AD}| \cdot |\overline{AE}| \cdot \cos 30° \\ &= \left((\sin 20°)^2 + (\cos 40°)^2 - 2 \cdot \sin 20° \cdot \cos 40° \cdot \cos 30°\right) \cdot |\overline{AB}|^2 \end{aligned}$$

Mit den Doppelwinkelformeln $\cos 2x = 1 - 2\,(\sin x)^2 = 2\,(\cos x)^2 - 1$ ergibt sich hieraus weiter:

$$x^2 = \left(\frac{1}{2}\,(1 - \cos 40°) + \frac{1}{2}\,(\cos 80° + 1) - 2 \cdot \sin 20° \cdot \cos 40° \cdot \cos 30°\right) \cdot |\overline{AB}|^2$$

Das Additionstheorem für den Sinus $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$ zeigt dann weiter:

$$\begin{aligned} x^2 &= \left(\frac{1}{2}\,(1 - \cos 40°) + \frac{1}{2}\,(\cos 80° + 1) - \left(\sin(40° + 20°) - \sin(40° - 20°)\right) \cdot \cos 30°\right) \cdot |\overline{AB}|^2 \\ &= \left(1 + \frac{1}{2}\,(\cos 80° - \cos 40°) - (\sin 60° - \sin 20°) \cdot \cos 30°\right) \cdot |\overline{AB}|^2 \end{aligned}$$

Nutzt man nun noch das Additionstheorem für den Kosinus:
$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$ und die Tatsache, dass $\sin 60° = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ist,

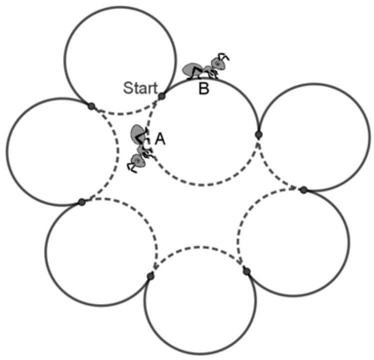
folgt schließlich:

$$x^2 = \left(1 + \frac{1}{2}\left(\cos(60° + 20°) - \cos(60° - 20°)\right) - \frac{3}{4} + \sin 20° \cdot \sin 60°\right) \cdot \left|\overline{AB}\right|^2$$
$$= \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot (-2 \cdot \sin 20° \cdot \sin 60°) + \sin 20° \cdot \sin 60°\right) \cdot \left|\overline{AB}\right|^2 = \frac{1}{4} \cdot \left|\overline{AB}\right|^2.$$

Das bedeutet $x = \frac{1}{2} \cdot \left|\overline{AB}\right| = 1$.

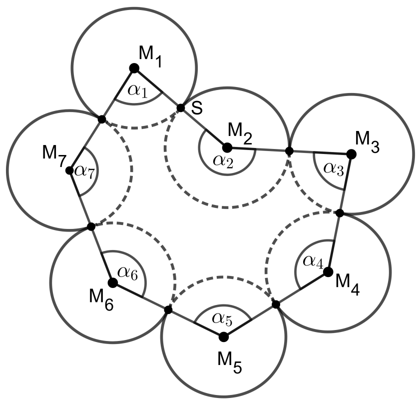
Aufgabe 5

Sieben gleichgroße Kreisscheiben werden zu einer geschlossenen Kette gelegt. Dabei berührt jeder Kreis nur seine beiden Nachbarkreise. Zwei Ameisen A und B starten in einem der Berührpunkte und laufen gleich schnell mit konstanter Geschwindigkeit auf den Kreisrändern. A läuft den gestrichelten inneren Weg und B den äußeren Weg entlang. Dabei können sie die Kreiskette auch mehrfach umrunden.
Beweise, dass sich die Ameisen irgendwann wieder im Start-punkt treffen, egal, wie die Kreisscheiben anfangs gelegt werden.
Anmerkung: Im Rahmen dieser Aufgabe sind Ameisen punktförmig :–).



1.Beweis :

Die Mittelpunkte der Kreisscheiben seien wie in der Abbildung mit M_1 bis M_7 bezeichnet. Außerdem sei $\alpha_1 = \angle M_7M_1M_2$, $\alpha_2 = \angle M_1M_2M_3, \ldots, \alpha_7 = \angle M_6M_7M_1$. Die Berührpunkte der Kreisscheiben liegen dann auf den Verbindungsstrecken benachbarter Mittelpunkte. Der gestrichelte innere Weg besteht demnach aus sieben Kreisbögen mit gleichem Radius $R = \left|\overline{MS}\right|$ (dem Radius der Scheiben) und den Mittelpunktswinkeln α_1 bis α_7.



Für die Gesamtlänge L_I dieses Weges gilt daher:

$$L_I = \frac{\alpha_1}{360°} \cdot 2 \cdot \pi \cdot R + \frac{\alpha_2}{360°} \cdot 2 \cdot \pi \cdot R + \ldots + \frac{\alpha_7}{360°} \cdot 2 \cdot \pi \cdot R$$
$$= (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_7) \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot R}{360°}.$$

Wenn keiner der Winkel $\alpha_i = 180°$ ist ($i = 1, 2, \ldots, 7$), dann bilden die Mittelpunkte M_i ein Siebeneck mit Innenwinkelsumme $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_7 = (7-2) \cdot 180° = 900°$. Sollten n der genannten Winkel gleich 180° sein, dann bilden die Mittelpunkte entsprechend nur ein $(7-n)$-Eck aber die Summe aller Winkel ist wieder gleich $n \cdot 180° + (7-n-2) \cdot 180° = 900°$.

Es ist also in jedem Fall

$$L_I = (\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_7) \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot R}{360°} = 900° \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot R}{360°} = 5 \cdot \pi \cdot R.$$

Die Länge L_A des Außenweges ergibt sich als Differenz der Summe aller Scheibenumfänge und der Länge des Innenweges:

$$L_A = 7 \cdot 2 \cdot \pi \cdot R - I = 9 \cdot \pi \cdot R.$$

Daher gilt: Wenn Ameise A und Ameise B beide eine Streckenlänge von genau $45 \cdot \pi \cdot R$ gelaufen sind, dann ist A 9-mal den gesamten Innenweg gelaufen und B 5-mal den gesamten Außenweg. Zu diesem Zeitpunkt befinden sich also beide Ameisen wieder am Startpunkt S, unabhängig davon, wie genau die Scheiben liegen.

Variante :

Der Innenweg besteht aus sieben Kreisbögen mit dem Radius der Kreisscheiben. Weil die Berührpunkte der Kreisscheiben genau auf den Verbindungsstrecken benachbarten Scheibenmittelpunkte liegen, sind die Mittelpunktswinkel dieser Kreisbögen die Innenwinkel eines (eventuell entarteten) Siebenecks. Die Summe dieser Winkel ist daher $(7-2) \cdot 180° = 900°$. Weil ein ganzer Kreisumfang einem Mittelpunktswinkel von 360° entspricht, entspricht die Länge des Innenwegs genau $\frac{900°}{360°} = 2,5$ Kreischeibenumfängen.
Der Außenweg hat dann die Länge von $(7 - 2,5) = 4,5$ Kreisscheibenumfängen.
Wenn die Ameisen beide genau 22,5 Kreisscheibenumfänge gelaufen sind, hat Ameise A den Innenweg genau $\frac{22{,}5}{2{,}5} = 9$ Mal abgelaufen und Ameise B den Außenweg genau $\frac{22{,}5}{4{,}5} = 5$ Mal. Sie befinden sich dann also beide wieder gleichzeitig am Startpunkt.

Aufgabe 6

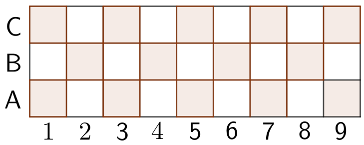
Auf jedem der 27 Felder eines rechteckigen 9×3-Spielfeldes steht genau ein Schüler. Auf ein Zeichen hüpft jeder Schüler über eine Kante auf ein direktes Nachbarfeld. Es ist möglich, dass danach zwei oder mehr Schüler auf demselben Feld stehen.
Bestimme die minimale und die maximale Anzahl an freien Feldern.

Lösung:

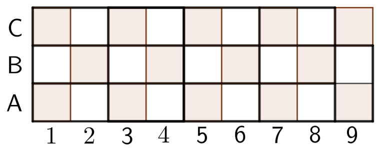
Die maximale Anzahl freier Felder ist 18, die minimale Anzahl ist 1.

1.Beweis :

Wir bezeichnen die Zeilen des Spielfeldes mit A, B und C, die Spalten mit $1, 2, \ldots, 9$. Z.B. erhält das Feld in der Zeile B und Spalte 5 die Bezeichnung $B5$.
Zunächst beweisen wir, dass nach dem Hüpfen immer mindestens ein Feld frei bleiben muss. Dazu färben wir die Felder des Spielfeldes wie ein Schachbrett mit braun und weiß - Bei $A1$ beginnen wir mit einem braunen Feld.

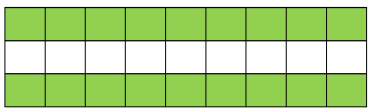


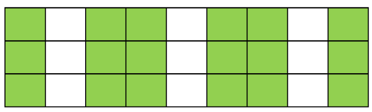
- Es gibt es 14 braune und 13 weiße Felder.
- Beim Hüpfen über eine Kante muss jeder Schüler die Farbe seines Feldes wechseln, also bleibt mindestens ein Feld der Farbe braun (von der es mehr Felder gibt) frei.
- Diese Mindestzahl ist tatsächlich erreichbar, denn man kann das $9x3$-Feld in 13 Zweiergruppen (Dominosteine) von je einem aneinandergrenzenden braunen und weißen Feld aufteilen.
  Wenn die Schüler auf den zusammengehörigen Feldern beim Hüpfen die Plätze tauschen, sind nachher alle diese 26 Felder wieder besetzt. Nur der Schüler, der auf dem übriggebliebenen braunen Feld $C9$ stand, musste auf einen der Dominosteine springen.



Nun zeigen wir, dass die maximale Anzahl an freien Feldern 18 ist.

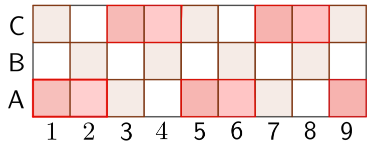
Die Anzahl von 18 freien Feldern erreicht man, indem man die Felder waagerecht oder senkrecht in Dreierreihen aufteilt, wobei alle Schüler von einer äußeren Reihe in die zugehörige mittlere Reihe springen und diejenigen, die in einer mittleren Reihe sind, in dieser Reihe bleiben. So werden 2/3 aller Felder frei, das sind 18 Felder. Die Aufteilung in Dreierreihen ist durch die Vorgabe $9x3$ ohne Rest möglich. In den Zeichnungen sind grün die „äußeren“ Reihen und weiß die „mittleren“ Reihen dargestellt.





Um zu zeigen, dass nicht mehr als 18 Felder frei bleiben können, betrachten wir die 9 Schüler, die vor dem Springen auf den rot markierten Feldern $A1, A2, C3, C4, A5, A6, C7, C8$ und $A9$ stehen.

Nach dem Springen können keine zwei dieser 9 Schüler auf dem gleichen Feld stehen. Direkt benachbarte Schüler (z.B. auf den Feldern $C3$ und $C4$) können allenfalls ihre Felder tauschen. Nicht direkt benachbarte Schüler auf den roten Feldern können nicht auf das gleiche Feld springen, da sie immer nur über eine Kante hüpfen dürfen und so der Abstand zwischen den roten Feldern zu groß ist. Folglich sind nach dem Springen mindestens 9 Felder besetzt und höchstens 18 Felder frei.



Eine größere Anzahl als 18 freie Felder kann man daher nicht erreichen.

Variante (Alternative zum Beweis für $n \leq 18$):

Wir betrachten die 18 Schüler in den Zeilen A und C und die Felder, auf die diese Schüler springen können:

- Ist das Zielfeld in Zeile B, dann ist es nur von zwei Feldern aus den Zeilen A und C zu erreichen (vom Feld direkt darüber und von dem direkt darunter).
- Ist das Zielfeld in Zeile A, dann ist es nur von 2 Schülern aus Zeile A erreichbar (von dem Feld links und dem Feld rechts daneben). Von Schülern aus Zeile C ist ein Feld aus Zeile A nicht erreichbar.
- Das gleiche wie für Felder aus Zeile A gilt analog für Felder aus Zeile C.

Folglich können auf jedem dieser Zielfelder höchsten zwei der 18 Schüler landen. Daher müssen nach dem Springen wenigstens $9 = 18/2$ Felder besetzt sein. Es können also nicht mehr als $27 - 9 = 18$ Felder frei sein.

Variante (weitere Alternative zum Beweis für $n \leq 18$):

Wir färben das Feld wie vorher schachbrettartig. Es sind 14 braune und 13 weiße Felder. Nun betrachten wir die maximale Anzahl an freien Feldern für jede Farbe. Wir fragen uns: Können mehr als 8 weiße Felder frei sein? Für die Antwort schauen wir uns die 10 braunen Felder in Zeile A und C an. Egal, wie diese ausgewählten Schüler springen, sie werden mit höchstens einem anderen ausgewählten Schüler ein Feld teilen. Um mindestens 9 freie weiße Felder zu bekommen, müssten die 10 ausgewählten Schüler auf den restlichen 4 weißen Feldern stehen. Da aber höchstens zwei von ihnen auf ein Feld springen können, können auf den 4 weißen Feldern höchstens 8 der ausgewählten Schüler stehen - ein Widerspruch. Bei den freien braunen Feldern kann man es einfacher machen. Ein braunes Feld kann höchstens 4 Nachbarfelder haben, demnach stehen am Ende höchstens 4 Schüler auf demselben braunen Feld. Deswegen kann man die 13 Schüler von weißen Feldern nicht auf 3 oder weniger braune Felder bringen, denn $13 > 3 \cdot 4$. Folglich sind höchstens $10 = 14 - 4$ braune Felder frei.
Wir kommen also auf höchstens $8 + 10 = 18$ freie Felder.