39. Landeswettbewerb Mathematik Baden-Württemberg

Lösungsbeispiele für die

Aufgaben der 2. Runde 2025/2026

Aufgabe 1

Julia addiert die Ziffern von 100 aufeinanderfolgenden vierstelligen natürlichen Zahlen. Bei welchen Zahlen erhält sie dabei die Summe 2026? Bestimme alle Möglichkeiten.

Lösung:

Die Summe 2026 erhält Julia genau bei den jeweils 100 aufeinanderfolgenden Zahlen beginnend bei 3826, 4726, 5626, 6526, 7426, 8326 und 9226.

Beweis:

Die kleinste der 100 Zahlen sei n und die Dezimaldarstellung von n habe die Tausenderziffer a, Hunderterziffer b, Zehnerziffer c und Einerziffer d. Dies wird im Folgenden kurz als

$$n = 1000a + 100b + 10c + d = \overline{abcd}$$

notiert. Die 100 betrachteten Zahlen sind dann n, $n+1$, $n+2$, ..., $n+99$.

<u>Fall 1:</u> $\overline{cd} = \overline{00}$

Dann sind die 100 Zahlen von der Form

$$\overline{ab00}, \overline{ab01}, \overline{ab02}, ..., \overline{ab99}.$$

Die Summe der Ziffern dieser Zahlen ist

$$100 \cdot a + 100 \cdot b + (10 \cdot 0 + 10 \cdot 1 + ... + 10 \cdot 9) + (10 \cdot 0 + 10 \cdot 1 + ... + 10 \cdot 9)\,.$$

Die ersten beiden Summanden entsprechen den Summen der Ziffern an den Tausender- bzw. Hunderterstellen der 100 Zahlen. Die erste Klammer enthält die Summe aller Ziffern an den Zehnerstellen, denn jede der Ziffern von 0 bis 9 ist genau zehnmal Zehnerziffer einer der Zahlen. Die letzte Klammer enthält aus demselben Grund die Summe aller Ziffern an den Einerstellen der 100 Zahlen.

Die Summe vereinfacht sich mit der Gaußschen Summenformel zu

$$100 \cdot (a+b) + 2 \cdot \left(10 \cdot \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 10\right) = 100 \cdot (a+b) + 900 = 100 \cdot (a+b+9).$$

Da diese Summe in jedem Fall durch 100 teilbar ist, kann sie nicht gleich 2026 sein.

<u>Fall 2:</u> $\overline{cd} > 0$ und $b < 9$

Dann gibt es einen Hunderterübergang bei den 100 Zahlen und mit $\overline{c'd'} = \overline{cd} - 1$ sind diese von der Form

$$\overline{abcd}, ..., \overline{ab99}, \overline{a(b+1)00}, \overline{a(b+1)01}, ..., \overline{a(b+1)c'd'}.$$

Die Summe der Ziffern an den Tausenderstellen dieser Zahlen ist wieder $100 \cdot a$. Die Summe der Ziffern an den Hunderterstellen ist $(100 - \overline{cd}) \cdot b + \overline{cd} \cdot (b+1)$. Betrachtet man die Zehner- und Einerstellen zusammen, so kommen hierbei zunächst alle Kombinationen von $\overline{cd}$ bis $\overline{99}$ vor und nach dem Hunderterübergang folgen die Kombinationen von $\overline{00}$ bis $\overline{c'd'} = \overline{cd} - 1$. Insgesamt ergeben sich hier also wieder alle möglichen Kombinationen aus zwei der Ziffern von 0 bis 9, die wie im 1. Fall alle Zahlen von 0 bis 99 bilden. Die Summe der Ziffern dieser Zahlen ist daher wieder 900.
Die Summe aller Ziffern der 100 Zahlen ist daher:

$$100 \cdot a + (100 - \overline{cd}) \cdot b + \overline{cd} \cdot (b+1) + 900 = 100 \cdot (a + b + 9) + \overline{cd}.$$

Diese Summe ist demnach genau dann 2026, wenn gilt:

$$100 \cdot (a + b + 9) + \overline{cd} = 2026 \qquad (*)$$

gelten. Wäre $a + b \geq 12$, dann wäre $100 \cdot (a + b + 9) + \overline{cd} \geq 2100 + \overline{cd} > 2026$. Wäre $a + b \leq 10$, dann wäre $100 \cdot (a + b + 9) + \overline{cd} \leq 1900 + 99 < 2026$.
Es muss also $a + b = 11$ sein, was $\overline{cd} = 2026 - 100 \cdot 20 = 26$ bedeutet. Zusammen mit $b < 9$ ergeben sich hier also die möglichen Fälle $n = 3826$, $n = 4726$, $n = 5626$, $n = 6526$, $n = 7426$, $n = 8326$ und $n = 9226$.
Umgekehrt rechnet man schnell nach, dass für diese n tatsächlich $(*)$ gilt, die Summe aller Ziffern der Zahlen von n bis $n + 99$ also genau 2026 ist .

<u>Fall 3:</u> $\overline{cd} > 0$ und $b = 9$

Dann gibt es bei den 100 betrachteten Zahlen einen Tausenderübergang; es muss also $a \leq 8$ sein. Mit $\overline{c'd'} = \overline{cd} - 1$ sind die 100 Zahlen von der Form

$$\overline{a9cd}, ..., \overline{a999}, \overline{(a+1)000}, \overline{(a+1)001}, ..., \overline{(a+1)0c'd'}.$$

Die Summe der Tausenderziffern ist nun $(100 - \overline{cd}) \cdot a + \overline{cd} \cdot (a+1)$, die Summe der Hunderterziffern ist $(100 - \overline{cd}) \cdot 9$ und die Summe aller Ziffern an den Zehner- und Einerstellen ist wie in den vorherigen Fällen wieder 900. Insgesamt soll also

$$(100 - \overline{cd}) \cdot a + \overline{cd} \cdot (a+1) + (100 - \overline{cd}) \cdot 9 + 900 = 2026$$

gelten. Dies vereinfacht sich nach Auflösen der Klammern zu

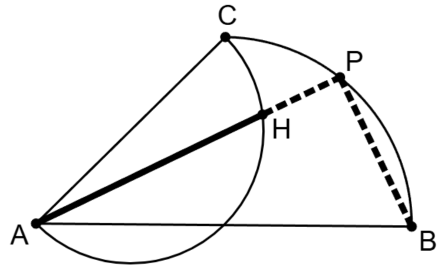
$$100 \cdot a - 8 \cdot \overline{cd} = 226.$$

Weil $1000 \cdot a - 8 \cdot \overline{cd} = 4 \cdot (25 - 2 \cdot \overline{cd})$ ist, ist die linke Seite dieser Gleichung in jedem Fall durch 4 teilbar, 2026 aber nicht. Daher gibt es in diesem Fall keine Lösung.

Damit sind alle möglichen Fälle behandelt und die oben angegebenen Lösungen sind alle möglichen.

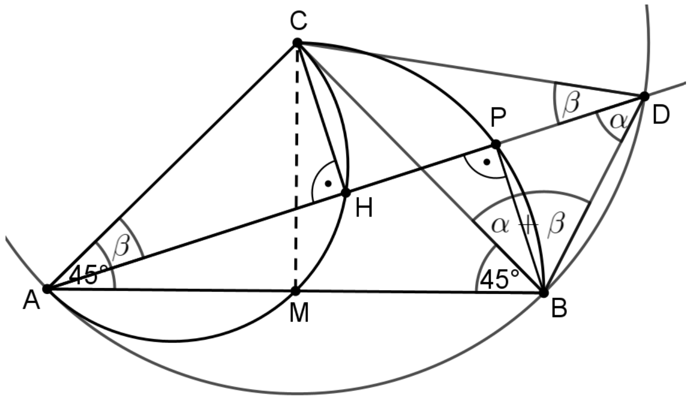
Aufgabe 2

P ist ein beliebiger Punkt auf dem Viertelkreisbogen BC um den Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$. Zeige: Der Halbkreis über der Strecke $\overline{AC}$ halbiert den Streckenzug APB im Punkt H.



1. Beweis:

Mit M sei der Mittelpunkt von $\overline{AB}$ bezeichnet. C liegt auf dem Kreisbogen mit Durchmesser $\overline{AB}$ und ist Randpunkt des Viertelkreisbogens BC mit Mittelpunkt M. Deswegen ist das Dreieck ABC rechtwinklig mit rechtem Winkel bei C und gleichschenklig. Es folgt insbesondere, dass $\angle BAC = \angle CBA = 45°$ ist. Außerdem gibt es wegen $|\overline{CA}| = |\overline{CB}|$ einen Kreis k mit Mittelpunkt C durch A und B.



Sei D der von A verschiedene Schnittpunkt dieses Kreises mit der Gerade AP. Der Winkel $\angle ADB$ wird mit α bezeichnet.

Behauptung: $\alpha = 45°$.

Begründung 1: α ist Umfangswinkel im Kreis k über der Sehne $|\overline{AB}|$, die zum Mittelpunktswinkel $\angle ACB = 90°$ gehört. Daher ist nach dem Umfangs-Mittelpunktswinkel-Satz $\alpha = \frac{1}{2} \cdot 90° = 45°$.

Begründung 2: Den Winkel $\angle CDA$ bezeichnen wir mit β: Weil $|\overline{CA}| = |\overline{CB}| = |\overline{CD}|$ ist, sind die Dreiecke ADC und BDC gleichschenklig. Es folgt daher $\angle DAC = \beta$ und $\angle DBC = \alpha + \beta$. Der Satz über die Innenwinkelsumme im Dreieck ABD ergibt dann

$$(45° - \beta) + (45° + \alpha + \beta) + \alpha = 180° \iff \alpha = 45°$$

Nach Satz des Thales ist $\angle APB = 90°$. Somit ist auch $\angle BPD = 90°$, weswegen das Dreieck BDP rechtwinklig und mit $\angle DBP = 180° - 90° - \alpha = 45°$ auch gleichschenklig ist. Es folgt:

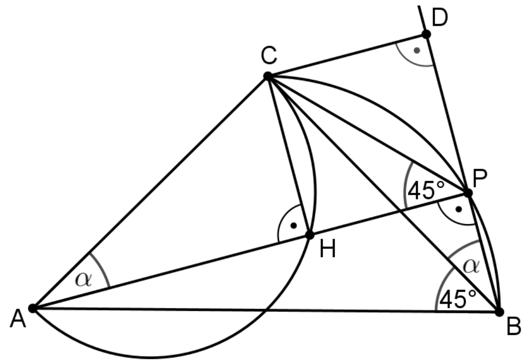
$$|\overline{HP}| + |\overline{PB}| = |\overline{HP}| + |\overline{PD}| = |\overline{HD}|. \qquad (*)$$

Schließlich ist nach Satz des Thales auch $\angle CHA = 90°$, weswegen $\overline{CH}$ Höhe im Dreieck ADC auf der Seite $\overline{AD}$ ist. Weil $\overline{AD}$ die Basis in diesem gleichschenkligen Dreieck ist, ist CH gleichzeitig Symmetrieachse, halbiert also $\overline{AD}$. Daher gilt mit $(*)$:

$$|\overline{AH}| = |\overline{HD}| = |\overline{HP}| + |\overline{PB}|.$$

Der Punkt H teilt den Streckenzug APB in zwei gleichlange Teile.

2. Beweis:



Wie im vorherigen Beweis sieht man, dass das Dreieck ABC gleichschenklig rechtwinklig ist. Mit D wird der Lotfußpunkt von C auf die Verlängerung von BP über P hinaus bezeichnet. Dann stimmen die beiden Dreiecke AHC und BDC in der Seitenlänge $|\overline{AC}| = |\overline{BC}|$ überein. Aufgrund des Satz des Thales ist $\angle CHA = 90° = \angle CDB$. Außerdem ist $\angle PAC = \alpha = \angle PBC$ nach Umfangswinkelsatz.

Insgesamt sind nach Kongruenzsatz sww also die beiden Dreiecke AHC und BDC kongruent. Es folgt:

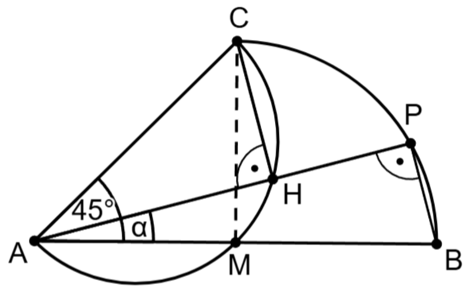
$$|\overline{AH}| = |\overline{BD}| = |\overline{BP}| + |\overline{PD}|. \qquad (**)$$

Das Viereck $HPDC$ hat (nach Satz des Thales in den Dreiecken AHC und ABP sowie nach Konstruktion des Punktes D) drei rechte Innenwinkel; es ist also ein Rechteck. Außerdem ist der Winkel $\angle CPA$ nach Umfangswinkelsatz so groß wie der Winkel $\angle CBA = 45°$. Das Dreieck CPH ist demnach gleichschenklig rechtwinklig, weswegen $|\overline{CH}| = |\overline{HP}|$ ist. Das Viereck $HPDC$ ist somit sogar ein Quadrat und es ist $|\overline{HP}| = |\overline{PD}|$. Zusammen mit $(**)$ folgt:

$$|\overline{AH}| = |\overline{BP}| + |\overline{PD}| = |\overline{BP}| + |\overline{PH}|.$$

Daraus folgt die Behauptung.

3. Beweis (mit Sinus und Kosinus):



Bezeichnet man den Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$ mit M, so gilt, weil C Randpunkt des Viertelkreisbogens um M von B nach C ist, dass $|\overline{MA}| = |\overline{MC}|$ und $\angle CMA = 180° - \angle BMC = 180° - 90° = 90°$. Das Dreieck AMC ist daher gleichschenklig rechtwinklig und es folgt $\angle MAC = 45°$ und

$$|\overline{AC}| = \frac{1}{\cos(45°)} \cdot |\overline{AM}| = \sqrt{2} \cdot |\overline{AM}| = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot |\overline{AB}|.$$

Bezeichnet man den Winkel $\angle BAP$ mit α, dann ist also $\angle HAC = 45° - \alpha$. Nach Satz des Thales ist das Dreieck ABP rechtwinklig mit rechtem Winkel bei P und das Dreieck CAH rechtwinklig mit rechtem Winkel bei H. In diesen Dreiecken gilt deswegen:

$$|\overline{AH}| = |\overline{AC}| \cdot \cos(45° - \alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos(45° - \alpha) \cdot |\overline{AB}|$$

und

$$|\overline{AP}| + |\overline{PB}| = \cos(\alpha) \cdot |\overline{AB}| + \sin(\alpha) \cdot |\overline{AB}|.$$

Um zu zeigen, dass H den Streckenzug APB in zwei Teile gleicher Länge zerlegt, genügt es deswegen, die Beziehung

$$2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos(45° - \alpha) \cdot \left|\overline{AB}\right| = \cos(\alpha) \cdot \left|\overline{AB}\right| + \sin(\alpha) \cdot \left|\overline{AB}\right|$$

nachzuweisen. Division durch $\left|\overline{AB}\right|$ auf beiden Seiten zeigt, dass dies äquivalent zu

$$\sqrt{2} \cdot \cos(45° - \alpha) = \cos(\alpha) + \sin(\alpha)$$

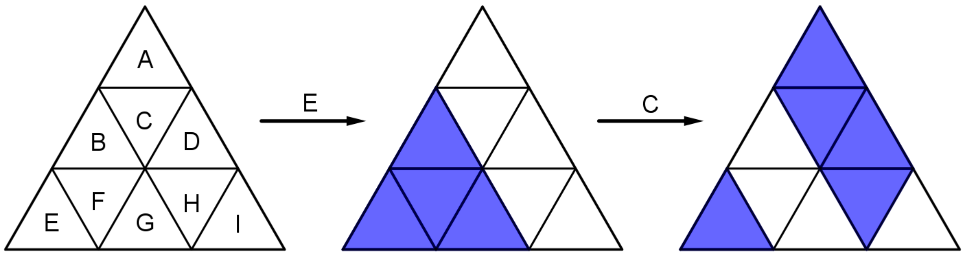
Mit dem Additionstheorem für den Kosinus sieht man, dass dies äquivalent zu

$$\sqrt{2} \cdot (\cos 45° \cdot \cos\alpha + \sin 45° \cdot \sin\alpha) = \cos(\alpha) + \sin(\alpha)$$

ist und weil $\sin 45° = \cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ist, ist letztere Gleichung offensichtlich immer wahr. Damit ist die Behauptung der Aufgabe bewiesen,

Aufgabe 3

Das Spielfeld eines Computerspiels besteht wie in der Abbildung aus neun Dreiecken A, B, C,..., H, I, von denen jedes im Spielverlauf weiß oder blau gefärbt werden kann. Ein Spielzug besteht darin, dass man eines dieser Dreiecke berührt: Es wechselt dann seine Farbe, ebenso wie alle Dreiecke, die mit dem berührten mindestens einen Eckpunkt gemeinsam haben. Man beginnt mit neun weißen Dreiecken. Das Beispiel zeigt, was passiert, wenn man zuerst Dreieck E und dann Dreieck C berührt:



Untersuche, ob folgende Färbungen des Spielfelds erreicht werden können:

a) *Feld A ist blau gefärbt, alle anderen Felder sind weiß.*

b) *Feld B ist blau gefärbt, alle anderen Felder sind weiß.*

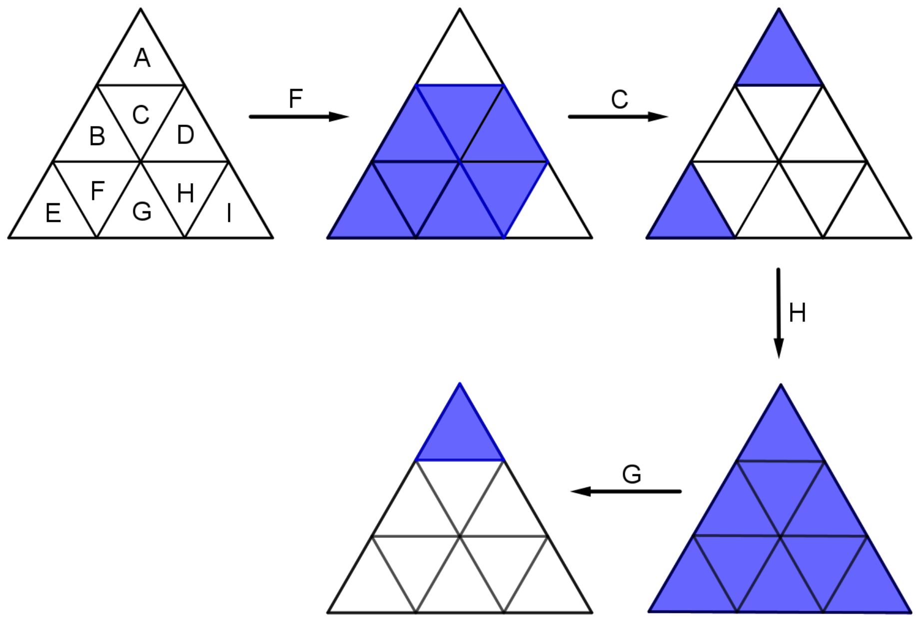
c) *Die Felder D, F und I sind blau gefärbt, alle anderen Felder sind weiß.*

Lösung:

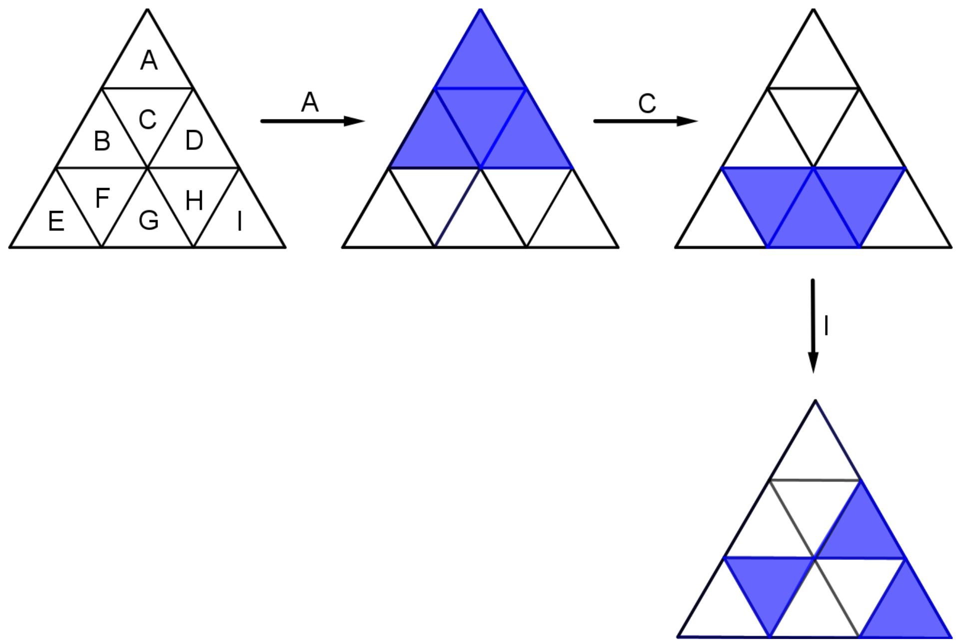
Die Konfigurationen in a) und in c) sind erreichbar, die Konfiguration in b) nicht.

1. Beweis:

Um zu zeigen, dass die Konfigurationen in a) und c) erreichbar sind, geben wir einfach jeweils eine Möglichkeit an, wie man zu ihnen gelangen kann, wobei wir dieselbe Notation wie in der Aufgabenstellung verwenden. Für a) hat man folgende Möglichkeit:



Für c) kann man folgendermaßen vorgehen:



Angenommen, es gäbe eine Abfolge von Dreiecksberührungen, nach der nur das Feld B blau gefärbt ist. Die Färbung von B ändert sich genau dann, wenn eines der Felder A, B, C, D, E, F, G oder H berührt wird. Mit den entsprechenden Kleinbuchstaben bezeichnen wir die Anzahl der Berührungen der entsprechenden Felder während der gesamten betrachteten Abfolge. Dann muss also, weil die Färbung von Feld B am Ende der Abfolge anders als zu Beginn sein soll, die Zahl $a+b+c+d+e+f+g+h$ ungerade sein. Weil die Farbe von Feld C nach der Abfolge unverändert (weiß) bleibt, muss $a+b+c+d+f+g+h$

gerade sein. Zusammen mit der vorherigen Aussage ergibt sich: e ist ungerade. Weil sich die Färbung von Feld H durch die Abfolge der Berührungen nicht ändert, ist die Summe $b+c+d+f+g+h+i$ gerade. Dann ist die Summe $b+c+d+e+f+g+h+i$ aber ungerade, was bedeutet, dass sich die Färbung des Feldes G durch die Abfolge der Berührungen von weiß auf blau ändert - ein Widerspruch.

Die Konfiguration in b) kann also nicht erreicht werden.

2. Beweis (mit einer Invarianten):

Die Aufgabenteile a) und c) werden wie im 1. Beweis behandelt.
Um nachzuweisen, dass die Konfiguration in b) nicht möglich ist, definieren wir zu jeder Färbung des Spielfelds eine Zahl Z wie folgt: Wenn das mit A bezeichnete Feld weiß ist, dann setzen wir $A = 1$, wenn es blau ist, dann setzen wir $A = -1$. Genauso werden die Werte der Variablen B bis I für eine gegebene Färbung des Spielfeldes definiert. Dann ist

$$Z = B \cdot H + C \cdot G + D \cdot F. \qquad (*)$$

Nun gilt:

1. Zu Beginn sind alle Felder weiß, also ist $Z = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 3$.

2. Das Berühren eines der Felder A, E oder I ändert die Färbung von genau drei der Felder B, H, C, G, D bzw. F, wobei die zugehörigen Variablen in der Summe $(*)$ in drei verschiedenen Summanden vorkommen. Daher ändert sich hierbei in jedem Summanden von $(*)$ das Vorzeichen genau eines Faktors (von 1 zu -1 oder umgekehrt), so dass insgesamt Z nur sein Vorzeichen ändert.

3. Das Berühren jedes anderen Feldes ändert die Färbung jedes der Felder B, H, C, G, D bzw. F; in der Summe $(*)$ ändert sich also in jedem Summand bei jedem der beiden Faktoren das Vorzeichen. Insgesamt bleibt Z also unverändert.

Die genannten Punkte bedeuten: Der Wert von Z ist während des Spiels stets gleich 3 oder -3. Die Konfiguration in b), bei der $Z = 1$ ist, kann daher nicht auftreten.

Variante (zu b), skizziert):

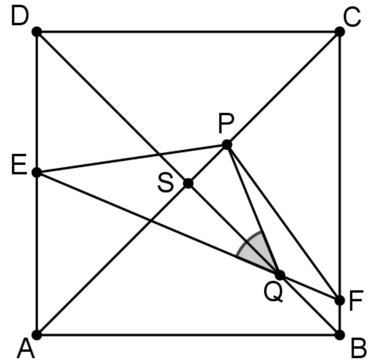
Von den sechs mittleren Feldern betrachten wir die Paare gegenüberliegender Felder: B und H, C und G, D und F. Das Drücken eines dieser sechs mittleren Felder ändert alle dieser Felder gemeinsam. Das Drücken eines der Eckfelder A, E, I ändert alle Paare gleichzeitig von gleichfarbig auf gegenfarbig oder umgekehrt. Zu Beginn sind alle Paare gleichfarbig. Daher können nach beliebig vielen Zügen immer nur alle drei Paare gleichfarbig oder alle gegenfarbig sein. In der in b) zu erreichenden Situation gilt aber: D und F sind gleichfarbig, C und G sind gleichfarbig, B und H sind gleichfarbig. Folglich ist diese Situation nicht möglich.

Variante (zu b), mit anderer Invarianten, skizziert):

Man jede Kante zwischen zwei Feldern grün, wenn die Farben der angrenzenden Felder gleich sind, und violett, wenn sie verschieden sind. Die Kante zwischen Feld B und C wechselt dann genau dann die Farbe, wenn man Feld E berührt. Gleiches gilt aber für die Kante zwischen Feld G und H. Da zu Beginn beide Kanten die gleiche Farbe grün haben, haben diese beiden Kanten zu jedem Zeitpunkt die gleiche Farbe. Im erwünschten Zustand müssen sie aber verschiedene Farben haben; dies ist also nicht erreichbar.

Aufgabe 4

Gegeben ist ein Quadrat $ABCD$ mit Diagonalenschnittpunkt S. Auf den Strecken $|\overline{AD}|$, $|\overline{BC}|$ und $|\overline{SC}|$ liegen die Punkte E, F bzw. P so, dass die Strecke $|\overline{EF}|$ die Strecke $|\overline{SB}|$ in einem von S verschiedenen Punkt Q schneidet und P von den Punkten E und F den gleichen Abstand hat.
Bestimme wie groß der Winkel $\angle PQE$ sein kann.

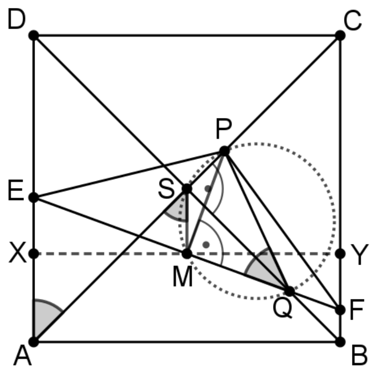


Lösung:

Die Größe des Winkels $\angle PQE$ ist $45°$.

1. Beweis:

M bezeichne den Fußpunkt des Lotes vom Punkt P auf die Strecke $\overline{EF}$. Da die Diagonalen im Quadrat bekanntlich senkrecht aufeinander stehen, gilt dann $\angle QSP = 90° = \angle QMP$. Die Punkte M und S liegen also auf dem Thaleskreis über dem Durchmesser $\overline{PQ}$. Da die Punkte A, S und P auf einer Geraden liegen, gilt mit dem Nebenwinkelsatz $\angle ASM = 180° - \angle MSP$. Und da sich im Sehnenviereck $QPSM$ gegenüberliegende Winkel zu $180°$ ergänzen, gilt $\angle PQM = 180° - \angle MSP$. Zusammen ergibt sich somit $\angle PQM = \angle ASM$.



Das Dreieck EFP ist nach Voraussetzung gleichschenklig mit $|\overline{PE}| = |\overline{PF}|$. Da in gleichschenkligen Dreiecken die Höhe auf die Basis bekanntlich mit der Seitenhalbierenden der Basis übereinstimmt, ist der Höhenfußpunkt M auch der Mittelpunkt der Basis $\overline{EF}$.

Als Mittelpunkt der Strecke $\overline{EF}$ liegt M, wie auch der Diagonalenschnittpunkt S, auf der Mittelsenkrechten der Quadratseite $\overline{AB}$: Die zu $\overline{AB}$ parallele Gerade durch den Punkt M schneide die Quadratseiten $\overline{AD}$ und $\overline{BC}$ in den Punkten X und Y. Die Dreiecke XME und FYM sind dann gemäß dem SWW-Satz kongruent: $|\overline{EM}| = |\overline{MF}|$, $\angle EMX = \angle FMY$ (Scheitelwinkelsatz) und $\angle MXE = 90° = \angle MYF$. In diesen Dreiecken gilt daher auch $|\overline{MX}| = |\overline{MY}|$ – weshalb M, wie auch S, auf der Mittelsenkrechten der Quadratseite $\overline{AB}$ liegt. Daher ist die Gerade durch M und S parallel zur Quadratseite $\overline{AD}$. Gemäß dem Wechselwinkelsatz gilt nun $\angle ASM = \angle SAD$. Und da im rechtwinklig-gleichschenkligen Dreieck ACD $\angle CAD = 45°$ gilt, ergibt sich insgesamt: $\angle PQM = \angle ASM = \angle CAD = 45°$.

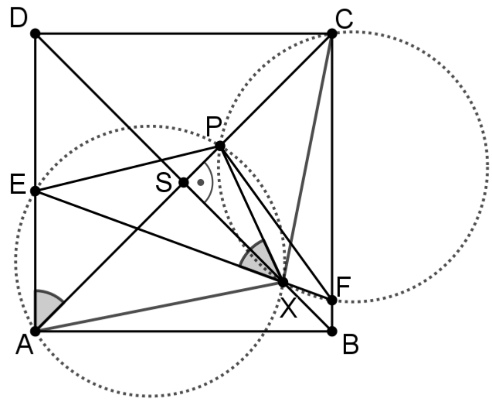
Zum Fall $P = S$:

Dann liegt P auf der Mittelsenkrechte der Quadratseite $\overline{AB}$. Wie oben gezeigt, liegt auch M auf dieser Mittelsenkrechte. Dabei kann nicht $M = S$ gelten, weil sonst $\overline{EF}$ die Strecke

$\overline{SB}$ nicht (nur) in einem von S verschiedenen Punkt schneiden würde. Also ist die Gerade $MS = MP$ sowohl Mittelsenkrechte der Strecke $\overline{AB}$, als auch der Strecke $\overline{EF}$. Damit sind EF und AB parallel und es ist nach Stufenwinkelsatz $\angle PQE = \angle SQE = \angle SBA = 45°$.

2. Beweis:

X bezeichne den zweiten Schnittpunkt der Umkreise (EAP) und (FCP) der Dreiecke EAP und FCP.
Wir begründen im Folgenden, dass X mit dem Punkt Q übereinstimmt, indem wir zeigen, dass X sowohl auf der Strecke $\overline{EF}$ als auch auf der Diagonalen $\overline{BD}$ liegt. Der Punkt Q liegt damit also auf den Umkreisen der Dreiecke EAP und FCP.
Der Punkt X liegt auf der Strecke $\overline{EF}$: Mit dem Umfangswinkelsatz im Kreis (EAP) über der Kreissehne $\overline{EP}$ gilt $\angle PXE = \angle PAE$.



Weiter gilt im Sehnenviereck $XFCP$: $\angle FXP = 180° - \angle PCF = 180° - \angle PAE$. (Mit dem Wechselwinkelsatz zu $AD \parallel BC$ gilt $\angle PCF = \angle PAE$.) Zusammen ergibt sich $\angle PXE + \angle FXP = \angle PAE + 180° - \angle PAE = 180°$. X liegt daher auf der Strecke $\overline{EF}$.

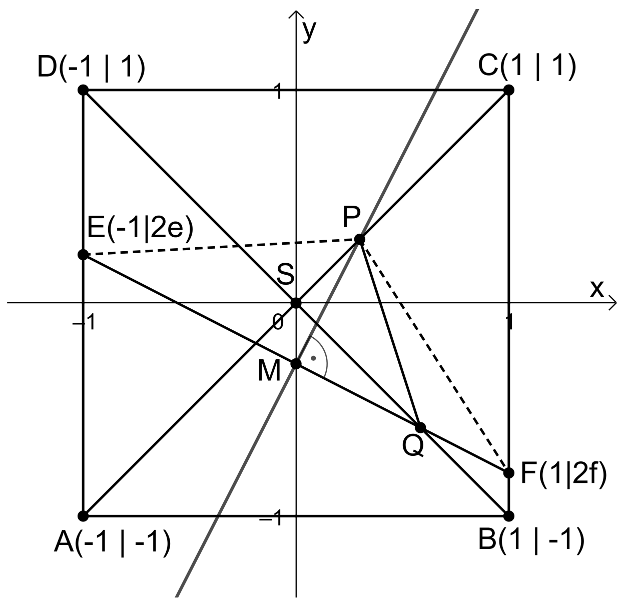
Der Punkt X liegt auf der Diagonalen $\overline{BD}$:

Im gleichschenkligen Dreieck EFP gilt $\angle FEP = \angle PFE$. Dann ergibt der Umfangswinkelsatz in den Kreisen (EAP) und (FCP) über der Kreissehne $\overline{PX}$: $\angle XAP = \angle XEP = \angle FEP = \angle PFE = \angle PFX = \angle PCX$. Nun folgt mit $\angle XAC = \angle XAP = \angle PCX = \angle ACX$, dass das Dreieck CAX gleichschenklig mit $|\overline{XA}| = |\overline{XC}|$ ist. Mit dem SSS-Kongruenzsatz folgt dann, dass die Dreiecke ABX und BCX kongruent sind: $|\overline{AB}| = |\overline{BC}|$, $|\overline{BX}| = |\overline{BX}|$ und $|\overline{XA}| = |\overline{XC}|$. Daher gilt auch $\angle XBA = \angle CBX$ – d.h. X liegt auf der Winkelhalbierenden des Winkels $\angle CBA$ und damit auf der Diagonalen $\overline{BD}$.

Zusammen ergibt sich wie behauptet $X = Q$.

Nun liefert der Umfangswinkelsatz im Umkreis des Sehnenvierecks $AXPE = AQPE$ über der Kreissehne $\overline{EP}$: $\angle PQE = \angle PXE = \angle PAE = \angle CAD = 45°$.

3. Beweis (mit Koordinaten):



Wir legen die Figur so in ein Koordinatensystem, dass der Diagonalenschnittpunkt S im Ursprung liegt und die Koordinatenachsen parallel zu den Geraden AB bzw. AD verlaufen. Die Einheiten wählen wir so, dass A und B die Koordinaten $A(-1|-1)$ und $B(1|-1)$ haben.

Nach Voraussetzung haben E und F dann Koordinaten der Form $E(-1|2e)$ und $F(1|2f)$ mit $-\frac{1}{2} \leq e, f \leq \frac{1}{2}$ (der Faktor 2 erleichtert die späteren Rechnungen). Die Punkte P und Q liegen auf den Geraden AC und BD, die im gewählten Koordinatensystem durch die Geradengleichungen $AC : y = x$ und $BD : y = -x$ beschrieben werden. Ihre Koordinaten sind daher von der Form $P(p|p)$ und $Q(q|-q)$, wobei nach Voraussetzung $0 \leq p, q \leq 1$ ist.
Der Mittelpunkt M der Strecke $\overline{EF}$ hat dann die Koordinaten

$$M\left(\frac{-1+1}{2}\middle|\frac{2e+2f}{2}\right) = M\left(0|e+f\right).$$

Weil Q auf $\overline{SB}$ liegt, muss M unterhalb der x-Achse liegen, was $e + f < 0$ nach sich zieht.
Die Gerade EF durch die Punkte E und F besitzt die Steigung $m = \frac{2f-2e}{1-(-1)} = f - e$ und den y-Achsenabschnitt $M_y = e+f$. Ihre Geradengleichung lautet daher $EF : y = (f-e) \cdot x + e + f$.
Da Q Schnittpunkt der Geraden EF und BD ist, gilt für die x-Koordinate q dieses Punktes:

$$(f-e) \cdot q + e + f = -q \qquad \Longleftrightarrow \qquad (e-f-1)\, q = e + f.$$

Weil $e + f < 0$ ist, muss $e - f - 1 \neq 0$ sein, so dass $q = \frac{e+f}{e-f-1}$ und damit $Q\left(\frac{e+f}{e-f-1}\middle| -\frac{e+f}{e-f-1}\right)$ folgt.
Wegen $\left|\overline{PE}\right| = \left|\overline{PF}\right|$ liegt der Punkt P auf der Mittelsenkrechten $m_{\overline{EF}}$ der Strecke $\overline{EF}$. Im Fall $e = f$ schneidet diese Mittelsenkrechte die Strecke $\left|\overline{SC}\right|$ in $P = S$. Da in diesem Fall $\overline{QE}$ parallel zur Seite $\overline{AB}$ ist, folgt mit Stufenwinkelsatz $\angle PQE = \angle SQE = \angle SBA = 45°$.
Wenn $e \neq f$ ist, dann ist die Steigung von $m_{\overline{EF}}$ der negative Kehrwert der Steigung der Gerade EF, d.h. $-\frac{1}{f-e} = \frac{1}{e-f}$. Ihre Geradengleichung lautet somit $m_{\overline{EF}} : y = \frac{1}{e-f} \cdot x + e + f$.
Für die x-Koordinate p des Punkts P gilt dann:

$$\frac{1}{e-f} \cdot p + e + f = p \qquad \Longleftrightarrow \qquad p = \frac{(e+f)\cdot(e-f)}{e-f-1} \qquad \Rightarrow \qquad P\left(\frac{(e+f)\cdot(e-f)}{e-f-1}\middle|\frac{(e+f)\cdot(e-f)}{e-f-1}\right)$$

Mit der bekannten Abstandsformel für Punkte im kartesischen Koordinatensystem kann man nun die Abstände des Punkts M von P und Q in Abhängigkeit von e und f berechnen:

$$\begin{aligned}
|\overline{MP}|^2 &= \left(\frac{(e+f)\cdot(e-f)}{e-f-1}-0\right)^2+\left(\frac{(e+f)\cdot(e-f)}{e-f-1}-(e+f)\right)^2 \\
&= \left(\frac{(e+f)\cdot(e-f)}{e-f-1}\right)^2+\left(\frac{(e+f)\cdot(e-f)-(e+f)\cdot(e-f-1)}{e-f-1}\right)^2 \\
&= \frac{(e+f)^2}{(e-f-1)^2}\cdot\left((e-f)^2+(e-f-(e-f-1))^2\right) \;=\; \frac{(e+f)^2\cdot((e-f)^2+1)}{(e-f-1)^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|\overline{MQ}|^2 &= \left(\frac{e+f}{e-f-1}-0\right)^2+\left(-\frac{e+f}{e-f-1}-(e+f)\right)^2 \\
&= \left(\frac{e+f}{e-f-1}\right)^2+\left(\frac{-(e+f)-(e+f)\cdot(e-f-1)}{e-f-1}\right)^2 \\
&= \frac{(e+f)^2}{(e-f-1)^2}\cdot\left(1+(-1-(e-f-1)))^2\right) \;=\; \frac{(e+f)^2\cdot(1+(e-f)^2)}{(e-f-1)^2}
\end{aligned}$$

Da Abstände nicht-negativ sind, folgt hiermit $|\overline{MP}|=|\overline{MQ}|$. Das rechtwinklige Dreieck QPM ist also gleichschenklig mit der Basis $\overline{PQ}$. (Wegen $e+f<0$ und damit $(e+f)^2>0$ folgt aus den Formeln für die Abstände: $|\overline{MP}| \neq 0 \neq |\overline{MQ}|$ – d.h. das Dreieck QPM ist nicht-entartet.) Der Winkel $\measuredangle PQE = \measuredangle PQM$ beträgt nun als Basiswinkel in einem gleichschenklig-rechtwinkligen Dreieck $45°$.